Un spectromètre analyse la lumière émise par une lampe. On obtient ainsi le profil spectral d'intensité lumineuse $I(\lambda)$ émise par la lampe.

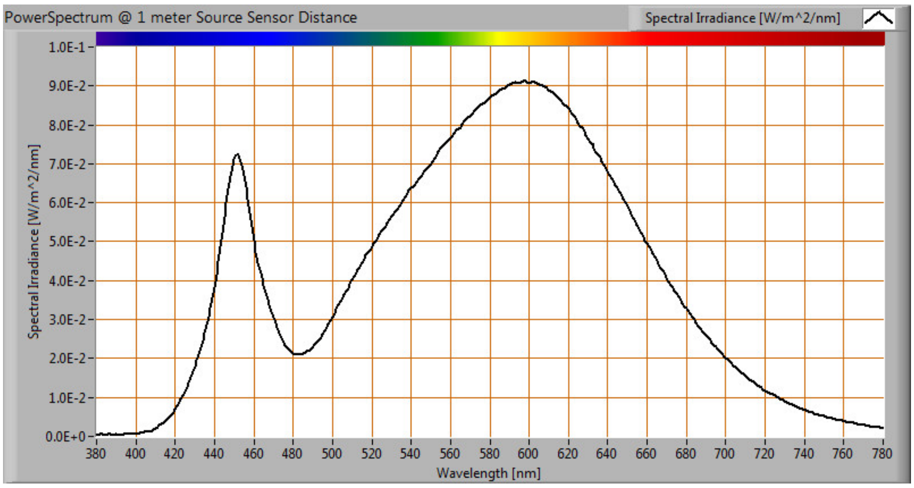

Figure 1 – Profil spectral d'intensité lumineuse

L'intensité lumineuse totale visible correspond à

$$I_{tot} = \int_{400\,\mathrm{nm}}^{800\,\mathrm{nm}} I(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

.

N'ayant pas l'expression de $I(\lambda)$ il n'est pas possible de calculer I_{tot} de manière exacte. Il faut donc envisager une méthode approchée.

1 Méthode des rectangles

On approche une fonction f définit sur un intervalle $[a, b]$ par une fonction en escalier.

— On considère un entier n et un pas de subdivision égal à $\dfrac{b-a}{n}$.

— Le milieu du premier palier est situé en $x = x_1 = a + \text{pas}/2$.

— Pour k entier, $k \in [0, n-1]$ on définit alors $x_k = x_1 + k \times \text{pas}$

— L'intégrale est donc approchée par la somme des aires des différents rectangles de largeur égale au pas et de hauteur $f(x_k)$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} \text{pas} * f(x_k)$$

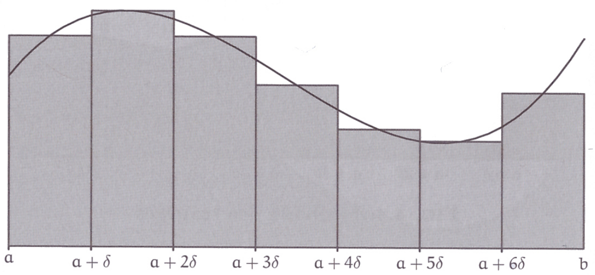

Figure 2 – Principe de l'approximation par des rectangles

2 Méthode des trapèzes

On approche une fonction f définit sur un intervalle $[a, b]$ par une fonction en escalier.

— On considère un entier n et un pas de subdivision égal à $\frac{b-a}{n}$.

— Pour k entier, $k \in [0, n-1]$ on définit alors $x_k = a + k \times \text{pas}$

— L'intégrale est donc approchée par la somme des aires des différents trapèzes de largeur égale au pas et de hauteurs $f(x_k)$ à gauche et $f(x_{k+1})$ à droite :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} \text{pas} * \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

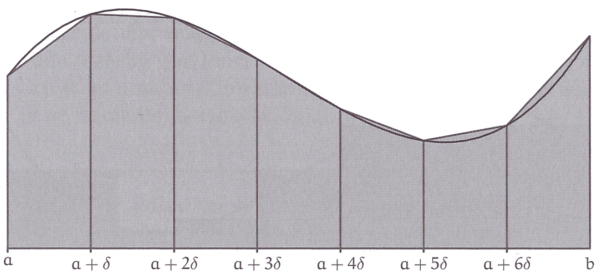

Figure 3 – Principe de l'approximation par des trapèzes

3 Application

Exercice 1 Rectangles

1. Définir une fonction **rectangle** qui prend en arguments :
   — une fonction f,
   — un intervalle $[a, b]$
   — un nombre de subdivisions n

   et renvoie une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles
2. Définir une fonction **inv** telle que inv(x)=1/x
3. Que vaut la valeur approchée de $\int_1^{10} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ calculée par la méthode des rectangles avec un pas de 1
4. Effectuer à nouveau le calcul à l'aide de la fonction anonyme **lambda**
5. Quelle est la complexité de la méthode des rectangles ?
6. Déterminer la valeur minimale du pas pour calculer valeur approchée de $\int_1^{10} \mathrm{d}x/x$ à 10^{-2} près.

Exercice 2 Trapèzes

1. Rependre l'exercice précédent avec la méthode des trapèzes
2. Représenter sur un même graphe les valeurs obtenues avec les deux méthodes ainsi que la valeur exacte pour un nombre de points compris entre 5 et 30.
3. Quelle est la méthode la plus performante ?

Exercice 3 Analyse d'un enregistrement

Un faisceau lumineux est capté par un spectromètre qui analyse la densité spectrale du rayonnement qu'il reçoit. Les données collectées sont regroupées dans un fichier .txt associé au sujet.

1. Lire le fichier .txt avec Python et tracer la densité spectrale en fonction de la longueur d'onde.
2. Déterminer l'intensité du faisceau par intégration numérique de la densité spectrale.