L'objectif de ce TP est d'utiliser différentes méthodes de résolutions numériques d'un système d'équations différentielles et de comparer leurs performances.

1 Étude physique du système

On étudie le mouvement d'une bille dans le plan $(x0y)$ lancée depuis le sol $(x(t=0)=0$ et $y(t=0)=0)$ avec une vitesse $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ et avec un angle $\theta = 50\,°$. La bille n'est soumise qu'à la pesanteur.

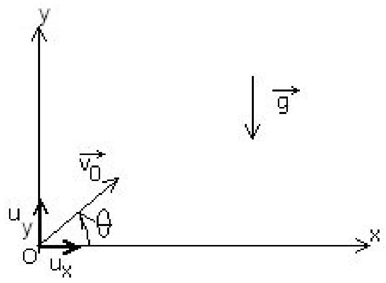

Figure 1 – Paramétrage des conditions initiales

1. Définir une fonction **position**`(t)` qui renvoie pour chaque instant $t \geq 0$ les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la bille.
2. Proposer une suite de commandes permettant d'obtenir deux listes :
   — l'une notée `x` contenant les abscisses occupées par la bille toutes les 0,1 s avant que la bille ne touche de nouveau le sol ;
   — l'autre notée `y` contenant les altitudes de la bille aux mêmes instants.
3. Représenter graphiquement la trajectoire de la bille.

2 Résolution du système différentiel par la méthode d'Euler

4. Écrire le système d'équations différentielles vérifié par $x(t)$ et $y(t)$.
5. Montrer que ce système peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = f(Y(t), t), \quad Y(t=0) = Y_0$$

   où $Y(t)$ est un vecteur et $f(Y(t), t)$ une fonction.
6. Définir une fonction **mvt**`(Y,t)` qui retourne la fonction identifiée dans la question précédente.
7. Définir une fonction **euler**`(f,a,y0,pas)` qui met en œuvre l'algorithme d'Euler. Cette fonction prend en argument :
   — une fonction f ;
   — une date de départ a ;
   — des conditions initiales y_0 ;
   — un pas de calcul *pas*.

   La condition d'arrêt correspond à la dernière position avant que la bille ne touche à nouveau le sol.
8. Proposer une procédure permettant d'extraire les positions successives de la bille calculées à l'aide de l'algorithme d'Euler (avec un pas de 0,1 s) puis représenter sur un même graphe légendé les positions calculées avec cet algorithme et celles prévues par la résolution analytique des équations du mouvement.
9. Que penser de la qualité de la résolution numérique ? Comment améliorer les performances du calcul effectué par la méthode d'Euler ?

3 Utilisation de la fonction odeint

10. Utiliser directement la fonction **odeint** disponible dans la bibliothèque **scipy.integrate** et calculer pour les mêmes dates les positions occupées par la bille.
11. Ajouter sur le même graphe légendé les positions ainsi obtenues et commenter.

4 Les méthodes de Runge-Kutta

4.1 Pourquoi la méthode d'Euler est-elle si peu performante ?

La méthode d'Euler est une méthode de résolution numérique d'un problème qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y(t), t) \quad t \in [a, b], \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \\ y(t_0) = y_0 \quad t_0 \in [a, b], \quad y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Il s'agit d'un schéma numérique à pas unique basé sur la discrétisation de la variable t. On note h ce pas et y_n la valeur approchée de $y(t_n)$ pour différents instants $t_n = nh$.

En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1}, la relation de récurrence s'écrit :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t), t)\mathrm{d}t$$

La méthode d'Euler (explicite) consiste en fait à approcher l'intégrale par la méthode des rectangles (à gauche) :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t), t)\mathrm{d}t \approx hf(y(t_n), t_n)$$

Ainsi le schéma itératif de la méthode d'Euler (explicite) est le suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(y(t_n), t_n) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

Graphiquement on voit l'erreur commise à chaque itération. La méthode des rectangles est une méthode peu performante pour approximer une intégrale. La méthode d'Euler correspond à une méthode de Runge-Kutta d'ordre 1

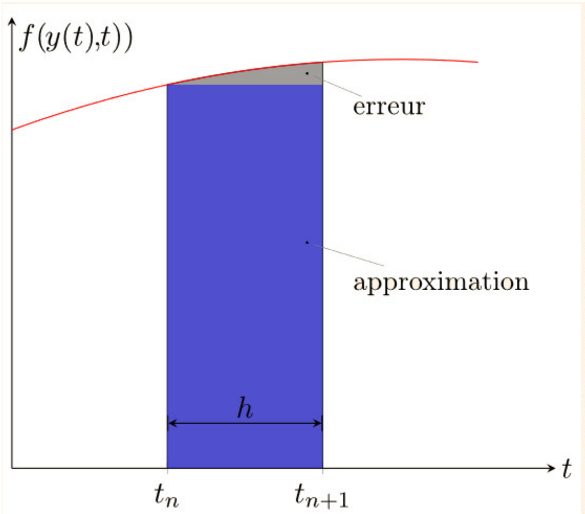

Figure 2 – Approximation de l'intégrale par un rectangle

4.2 Méthode de Heun : Méthode de Runge-Kutta d'odre 2

Afin d'améliorer l'évaluation de l'intégrale, il est possible d'utiliser la méthode des trapèzes. Il s'agit alors de la méthode de Heun :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t), t)\mathrm{d}t \approx \frac{h}{2}\left[f(y(t_n), t_n) + f(y(t_{n+1}), t_{n+1})\right]$$

Ici l'intégrale dépend des valeurs de y_n et y_{n+1} ce qui, si on en restait là donnerait une méthode implicite. Pour éviter ces complications, on utilise la méthode d'Euler (explicite) afin d'estimer la valeur de y_{n+1} qui intervient dans $f(y(t_{n+1}), t_{n+1})$.

Ainsi le schéma itératif de la méthode de Heun est le suivant :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \quad \text{avec} \begin{cases} k_1 = f(y_n, t_n) \\ k_2 = f(y_n + hk_1, t_n + h) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

Cette méthode présente l'avantage d'être précise et assez simple à programmer. Avec le calcul des deux coefficients (k_1 et k_2), la méthode de Heun correspond à une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

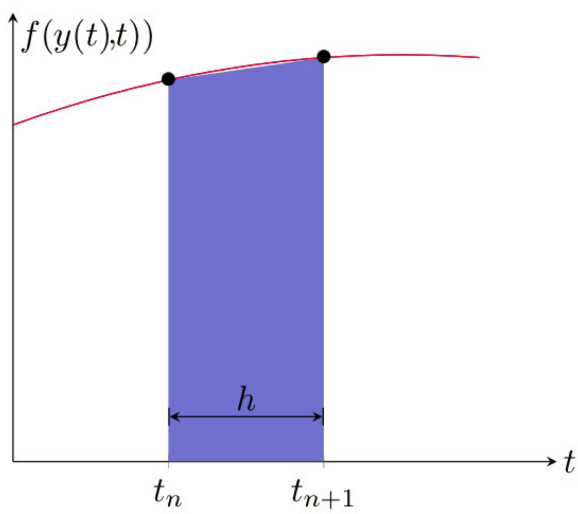

Figure 3 – Approximation de l'intégrale par un trapèze

12. Définir une fonction **RK2** qui prend en entrées les mêmes paramètres que la fonction **euler** et qui calcule les positions successives de la bille par la méthode de Heun.
13. Ajouter sur le même graphe légendé les positions ainsi obtenues et commenter.

4.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode la plus couramment utilisée pour les problèmes « simples »[a] est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. L'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t),t)\mathrm{d}t$ est alors approximée par une branche de parabole passant par les points extrêmes et le point milieu (= calcul approché d'une intégrale par la méthode de Simpson). Pour réaliser cette approximation il faut calculer 4 coefficients $(k_1,\ldots,k_4)$ avec des pondérations telles que le schéma numérique explicite s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right)$$

avec

$$\begin{cases} k_1 = f(y_n, t_n) \\ k_2 = f(y_n + \frac{1}{2}hk_1, t_n + \frac{1}{2}h) \\ k_3 = f(y_n + \frac{1}{2}hk_2, t_n + \frac{1}{2}h) \\ k_2 = f(y_n + hk_3, t_n + h) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

Par rapport à la méthode RK2, ce schéma numérique exige deux fois plus de calculs à chaque pas et donc un temps de calcul plus long, sans parler des erreurs d'arrondi qui s'accumulent plus vite. Cependant, ce défaut est généralement compensé par un gain de précision.

a. Les problèmes « à pente raide », possédant plusieurs temps caractéristiques ou traitant des vecteurs ou des matrices lourdes nécessitent des méthodes spécifiques à pas adaptatifs ou multipas.

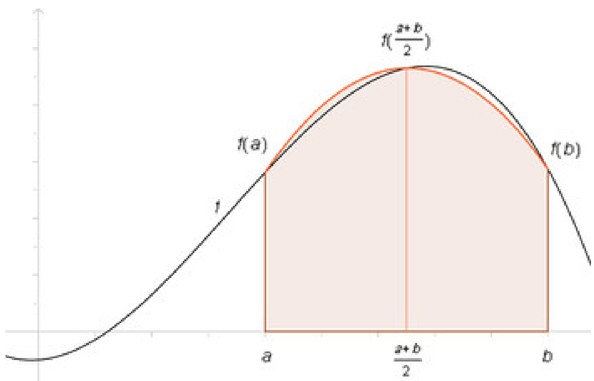

Figure 4 – Approximation de l'intégrale par une parabole

14. Définir une fonction **RK4** qui prend en entrées les mêmes paramètres que la fonction **euler** et qui calcule les positions successives de la bille par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
15. Ajouter sur le même graphe légendé les positions ainsi obtenues et commenter.

5 Caractérisation des performances

16. Pour des pas allant de 1×10^{-3} s à 1×10^{-1} s, calculer avec les différentes méthodes, l'altitude maximale atteinte par la bille puis représenter graphiquement l'erreur commise (en valeur absolue) lors de l'utilisation de ces différentes méthodes numériques en fonction du pas. Conclure.

6 Amélioration du modèle

La bille est en fait soumise à des frottements. La force exercée par l'air sur la bille dépend à la fois du mouvement de la bille par rapport au sol mais aussi de la vitesse du vent notée $\overrightarrow{V}$.

L'équation différentielle vérifiée par la bille peut s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{dt}} = -\overrightarrow{g} - k\left(\frac{\overrightarrow{v}^3}{||\overrightarrow{v}||} + \frac{\overrightarrow{V}^3}{||\overrightarrow{V}||}\right)$$

Données numériques : $k = 1\,\mathrm{m}^{-1}$ et $\overrightarrow{V} = V\overrightarrow{u_x}$; $V = 2\,\mathrm{m/s}$

17. En utilisant la méthode de votre choix résoudre numériquement cette équation différentielle et représenter graphiquement l'allure de la trajectoire de la bille pour un pas de 1×10^{-2} s.
18. Que constate-t-on si le la vitesse du vent passe à $3\,\mathrm{m/s}$?