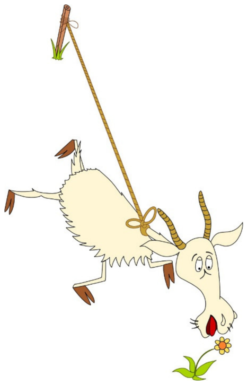

Une chèvre est attachée sur le périmètre d'un pré circulaire :

Calculer la longueur que doit avoir la corde pour qu'elle ne puisse brouter que la moitié du pré.

Cette énigme n'est pas seulement une récréation mathématique. On trouve des applications en minimisation d'interférences mutuelles, optimisation de la performance des brouilleurs, calcul de compromis en installation des relais de communication pour téléphones cellulaires, etc.

Première publication connue de cette énigme en 1748, en Angleterre.

Analyse mathématique du problème

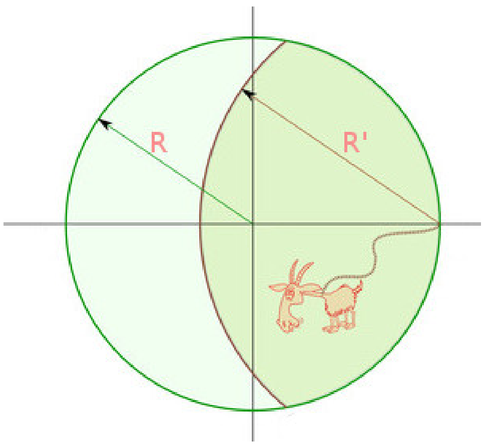

Figure 1 – Zone accessible à la chèvre

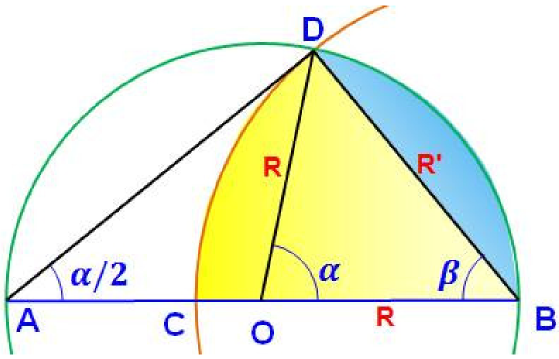

Figure 2 – Paramétrage

1. Donner une relation entre α et β
2. Justifier que l'aire du secteur jaune vaut $A_J = \dfrac{R'^2}{2}\beta$
3. Justifier que l'aire du secteur bleu vaut $A_B = \dfrac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$
4. Quelle est la relation entre la longueur R' de la corde et l'angle α ?
5. Montrer que le problème nécessite de résoudre l'équation

$$\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha - \frac{\pi}{2} = 0$$

Analyse numérique

L'équation ci-dessus ne possède pas de solution formelle. On envisage donc une de la résoudre numériquement afin de trouver la longueur de la corde solution du problème pour un champ de rayon $R = 10\,\mathrm{m}$

6. Définir la fonction **chevre(alpha)** qui renvoie $\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha - \dfrac{\pi}{2}$
7. Tracer la courbe représentant **chevre(alpha)** et vérifier que la solution de l'équation $\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha - \dfrac{\pi}{2} = 0$ se trouve dans l'intervalle $[1, 2]$ (en radians).
8. Utiliser une méthode de Newton en partant de $\alpha = 1\,\mathrm{rad}$ permettant :
   — de donner une approximation de la solution de l'équation à 1×10^{-4} près,
   — de renvoyer le nombre d'itérations effectuées pour ce calcul.
9. En déduire la longueur de la corde.
10. Faire de même à l'aide d'une méthode dichotomique sur l'intervalle $[1, 2]$ et conclure.