



Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

Introduction

Méthode des  
rectangles

Méthode des  
trapèzes

Comparaison

# Calcul approché d'une intégrale sur un segment



# Introduction

Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

Introduction

Méthode des  
rectangles

Méthode des  
trapèzes

Comparaison

Le but de ce chapitre est de mettre en œuvre des méthodes permettant de calculer des valeurs approchées d'intégrales. En effet, le nombre de fonctions dont on sait calculer une primitive est en fait très faible. Par ailleurs, la connaissance d'une primitive  $F$  ne suffit pas lorsque l'on ne sait pas calculer les valeurs de  $F$ .

Exemple :  $\int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2$ ; mais connaît-on explicitement  $\ln 2$  ?

Il est donc intéressant concernant  $\int_a^b f(t)dt$

- ▶ sur le plan pratique, de pouvoir obtenir une approximation lorsque les primitives de  $f$  ne sont pas calculables,
- ▶ sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitude aussi petite que souhaitée.



## Méthode des rectangles (à gauche)

Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

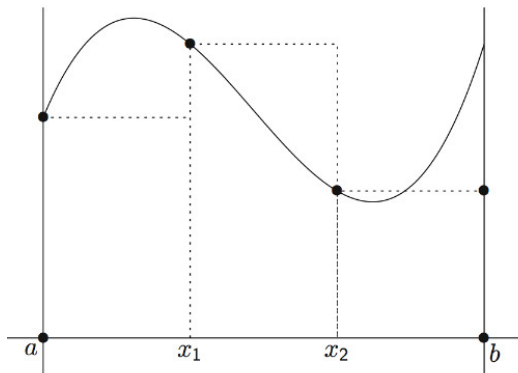
Introduction

Méthode des  
rectangles

Méthode des  
trapèzes

Comparaison

On considère une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur un intervalle  $[a, b]$ .  
On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de même  
largeur  $h = (b - a)/n$  et on note  
pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $x_i = a + ih$ .





Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

Introduction

Méthode des  
rectangles

Méthode des  
trapèzes

Comparaison

On remplace la fonction  $f$  par la fonction en escalier qui prend, sur chaque segment de la subdivision, la même valeur à l'extrémité gauche de ce segment que  $f$ . Cela revient à interpoler la fonction  $f$  sur le segment  $[x_i, x_{i+1}]$  par un polynôme de degré 0 qui vaut  $f(x_i)$ .

La valeur approchée de l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  par la méthode des rectangles est alors donnée par :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$



# Écriture Python de la méthode des rectangles (à gauche)

Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

Introduction

Méthode des  
rectangles

Méthode des  
trapèzes

Comparaison

```
def rectanglesG(f, a, b, n):  
    h=(b-a)/n  
    integrale=0  
    for i in range(n):  
        xi=a+i*h  
        integrale=integrale+h*f(xi)  
    return integrale
```



Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

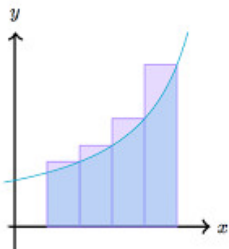
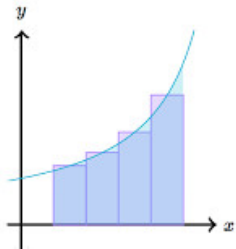
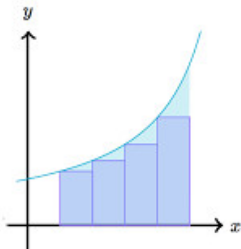
Introduction

Méthode des  
rectangles

Méthode des  
trapèzes

Comparaison

Autres possibilités de mise en œuvre de la méthode des rectangles :





## Méthode du point milieu

Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

Introduction

Méthode des  
rectangles

Méthode des  
trapèzes

Comparaison

- ▶ Écrire l'algorithme en langage Python qui met en œuvre la méthode du point milieu.



## Méthode des trapèzes

Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

Introduction

Méthode des  
rectangles

Méthode des  
trapèzes

Comparaison

On remplace la courbe représentative de  $f$  sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint  $(x_i, f(x_i))$  à  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ . Cela revient à interpoler la fonction  $f$  sur le segment  $[x_i, x_{i+1}]$  par un polynôme de degré 1 entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

La valeur approchée de l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  par la méthode des rectangles est alors donnée par :

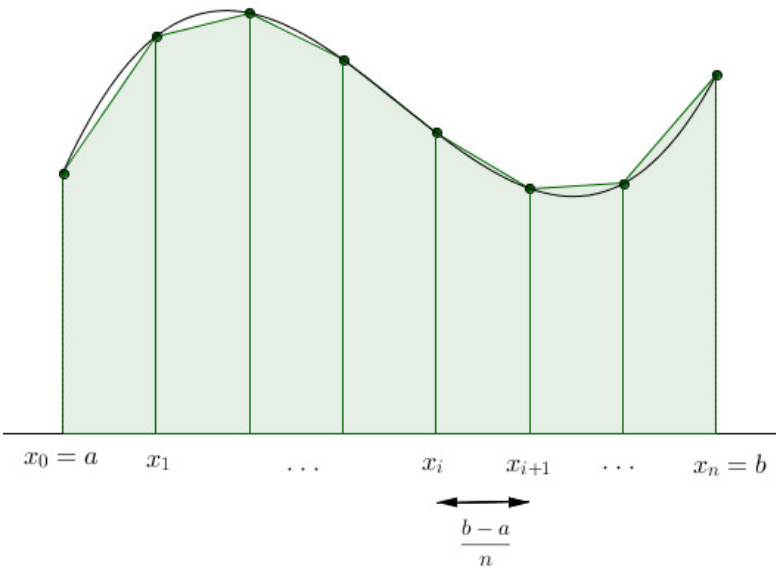
$$T_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$





Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

- Introduction
- Méthode des rectangles
- Méthode des trapèzes**
- Comparaison





Calcul  
approché  
d'une  
intégrale sur  
un segment

Introduction

Méthode des  
rectangles

**Méthode des  
trapèzes**

Comparaison

- ▶ Écrire l'algorithme en langage Python qui met en œuvre la méthode des trapèzes.



## Comparaison des trois méthodes

Méthode	Évolution de l'erreur
rectangles à gauche	
point milieu	
trapèzes	

Rq : Le calcul d'une intégrale est aussi directement exécutable avec la fonction **quad** de la bibliothèque `scipy.integrate`