Résolution numérique d'une équation différentielle ordinaire par méthode d'Euler

1

Introduction

Introduction

Une équation différentielle est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable.

Résoudre une équation différentielle consiste à trouver la ou les fonctions solutions de l'équation différentielle.

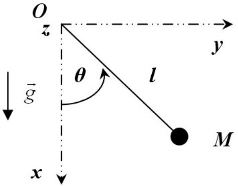
Certaines des EDO possèdent des solutions analytiques :

Exemple :

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$ a pour solution $y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-x}$.

Mais la plupart des EDO n'ont PAS de solution exprimable à l'aide des fonctions usuelles

Exemple :



L'EDO vérifiée par θ est $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0$. $\theta(t)$ ne peut pas s'exprimer, dans le cas général, à l'aide de fonctions usuelles.

2

EDO ordre 1

Problème de Cauchy

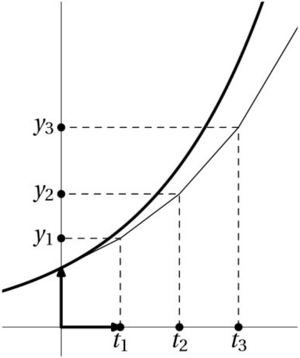
On appelle « problème de Cauchy » (d'ordre 1) le problème qui consiste à trouver, sur un intervalle I, une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 & t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Ce type de problème est récurrent en physique pour déterminer l'évolution temporelle d'un système.

Principe de la méthode d'Euler

Pour des instants donnés $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}$ la méthode d'Euler permet de déterminer approximativement les valeurs prises par la fonction y notées $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$. y_0 est la condition initiale donnée, et l'ensemble des autres y_i est à calculer. La méthode d'Euler est une méthode de résolution numérique approchée d'un problème de Cauchy.



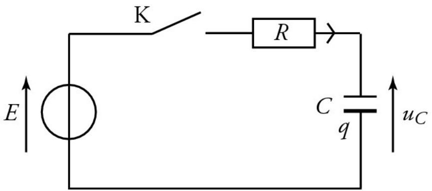
Principe de la méthode d'Euler (Schéma explicite)

Pour pouvoir mener efficacement le calcul, il faut que le pas, c'est à dire la distance entre t_{i+1} et t_i ne soit pas trop important.

Dans ces conditions on peut approximer une portion de courbe à une portion de droite. On calculera alors y_{i+1} à partir de y_i selon la relation :

$$y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) \times f(t_i, y_i)$$

Exemple : Charge d'un condensateur



Un circuit RC série comporte un résistor de résistance $R = 1\,\text{k}\Omega$, un condensateur de capacité $C = 1\,\mu\text{F}$ initialement déchargé en $t = 0$ et un générateur idéal de tension de f.e.m $E = 5\,\text{V}$. On ferme l'interrupteur K à pour $t = 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur pour $t \geq 0$.
2. Remplir les 2 premières colonnes du tableau suivant donnant les valeur de u_c à différents instants.

date (μs)	sol. exacte	Schéma explicite	Schéma implicite
0			
1.0			
2.0			
3.0			
4.0			

Principe de la méthode d'Euler (Schéma implicite)

Dans le schéma implicite, la portion de courbe est approximée par sa tangente en t_{i+1} :

$$y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) \times f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

- Le schéma implicite nécessite plus de calculs que le schéma explicite.
- Les deux schémas sont équivalents quand le pas $t_{i+1} - t_i$ tend vers 0.

3. Compléter la dernière colonne du tableau précédent.

Implémentation Python

```
def euler(f,a,b,y0,pas):
    y=y0
    t=a
    liste_y=[y0]
    liste_t=[a]
    while t+pas<=b:
        y=y+pas*f(y,t)
        liste_y.append(y)
        t=t+pas
        liste_t.append(t)
    return liste_t,liste_y
```

odeint est une fonction incluse dans la bibliothèque `scipy.integrate`. Elle permet de résoudre des ODE... comme notre fonction Euler

Application

1. Définir une fonction `tension` qui vérifie
   $$\texttt{tension}(u, t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
2. Pour un pas de 1 μs, tracer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur calculée avec :
   2.1 la solution solution exacte,
   2.2 la fonction `euler`,
   2.3 la fonction `odeint`.
3. Étudier l'influence du pas sur la performance de la résolution numérique.

3

EDO d'ordre >1

EDO d'ordre supérieur à 1

Exemple : Pendule simple $\Rightarrow$ $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$

On cherche une grandeur vectorielle Y qui vérifie sur un intervalle I : $Y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)) & t \in I \\ Y(t_0) = Y_0 & t_0 \in I, Y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Pour le pendule simple on pose $Y =$

- Déterminer la fonction **pendule** qui traduit la relation **pendule**(`Y,t`) $= Y'(t)$

- Utiliser l'algorithme d'Euler pour simuler l'évolution d'un pendule simple de longueur $\ell = 1\,\text{m}$ à partir des conditions initiales $\theta_0 = 50^\circ$ $\dot{\theta}_0 = 0^\circ/\text{s}$ durant $10\,\text{s}$
- Comparer les performances de la résolution numérique avec la fonction **odeint**.

4

Système d'EDO

Système d'équations différentielles

On considère une espèce chimique A capable de se transformer en C selon les actes successifs $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$.
Les vitesses de formation des espèces chimique $[A], [B]$ et $[C]$ sont liées par le système différentiel.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k_1[A] \\ \dfrac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t} = k_1[A] - k_2[B] \\ \dfrac{\mathrm{d}[C]}{\mathrm{d}t} = k_2[C] \end{cases}$$

Avec $k_1 = 0.02\,\mathrm{s}^{-1}$ et $k_1 = 0.01\,\mathrm{s}^{-1}$ Conditions initiales $[A]_0 = 1\,\mathrm{mol/L}, [B]_0 = 0\,\mathrm{mol/L}$ et $[C]_0 = 0\,\mathrm{mol/L}$

On veut simuler l'évolution de la concentration en A,B et C durant 10 min. On utilise la méthode d'Euler comme dans la situation précédente.

- Déterminer la fonction **concentrations** qui traduit la relation **concentrations**`(Y,t)` $= Y'(t)$
- Utiliser l'algorithme d'Euler pour simuler l'évolution des concentrations à partir des conditions initiales données.