



Recherches dichotomiques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

Recherches dichotomiques



Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

1

Chercher une valeur dans une liste numérique
triée



Position du problème

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone



La recherche séquentielle d'un élément dans une liste a une complexité temporelle (dans le pire des cas) en $O(\text{len}(\text{liste}))$
 \Rightarrow La durée de calcul augmente rapidement quand la taille de la liste augmente.

Objectif : Décrire une méthode qui converge plus efficacement (avec une meilleure complexité temporelle) vers le (bon) résultat



Proposition pour une liste triée

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

Méthode dichotomique :

- ▶ Méthode "diviser pour régner"
- ▶ Cherche la présence d'une valeur dans une liste numérique triée (ici dans l'ordre)
Entrées : valeur (type 'float' ou 'int') et liste (type 'list' ou 'ndarray')
Sortie : m la position dans la liste de la valeur cherchée (type 'int') si la valeur est dans la liste, False sinon



Implémentation Python

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

```
def RechercheDicho(valeur, liste):  
    g, d = 0, len(liste) - 1  
    while g <= d:  
        m = (g + d) // 2  
        if liste[m] == valeur:  
            return m  
        elif liste[m] < valeur:  
            g = m + 1  
        else:  
            d = m - 1  
    return False
```



S'appropriier l'algorithme

Recherches
dichoto-
miques

On cherche la valeur 8.1

[-3, -1.2, 0, 1.5, 3, 7.2, 8.1, 10, 15, 123]

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone



Recherches
dichoto-
miques

On cherche la valeur 3

[-3, -1.2, 0, 1.5, 3, 7.2, 8.1, 10, 15, 123]

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone



Recherches
dichoto-
miques

On cherche la valeur 0.3

`[-3, -1.2, 0, 1.5, 3, 7.2, 8.1, 10, 15, 123]`

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone



Analyser la complexité de l'algorithme

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

- ▶ Meilleur des cas :
- ▶ Complexité dans le meilleur des cas :

- ▶ Le pire des cas :



Complexité dans le pire des cas

Pour une liste contenant N valeurs triées,

- ▶ Quelle est la valeur de $d-g$ avant le premier passage dans la boucle `while` ?

- ▶ Montrer que $d-g$ est majoré après le premier passage dans la boucle `while`.

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone



Recherches dichoto- miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

En déduire une majoration de d-g après p passages dans la boucle while.

Déterminer la complexité de l'algorithme de recherche dichotomique dans le pire des cas.



Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone



Limites et faiblesses

Recherches
dichoto-
miques

On cherche la valeur 1×10^{-325}

$[1 \times 10^{-328}, 1 \times 10^{-327}, 1 \times 10^{-326}, 1 \times 10^{-325}, 1 \times 10^{-324}]$

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone



Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

2

Zéro d'une fonction continue et monotone



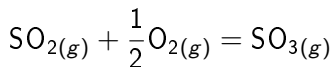
Exemple de problème (d'après sujet e3a PSI)

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

La production industrielle d'acide sulfurique repose sur l'oxydation du dioxyde de soufre SO_2 en trioxyde de soufre SO_3 (procédé dit de contact) en présence de catalyseur. La réaction d'oxydation de SO_2 , réalisée par l'oxygène de l'air dans un convertisseur où règne la pression $p = 1 \text{ bar}$, a pour équation :



Le procédé industriel étudié propose de travailler dans des conditions de température telles que la constante de cette d'équilibre pour cette réaction vaut $K^0 = 92$.



Un tableau d'avancement permet d'obtenir une relation entre la constante de réaction et le taux conversion de SO_2 noté α :

$$K^{02} = \frac{\alpha^2(a - b\alpha)}{(1 - \alpha)^2(c - b\alpha)}$$

Avec $a=100$; $b=3,8$; $c=11$

α = fraction de SO_2 qui a réagi : $\alpha = \frac{n_{\text{SO}_{2i}} - n_{\text{SO}_{2f}}}{n_{\text{SO}_{2i}}}$



Déterminer le taux de conversion α et conclure et la pertinence du procédé industriel envisagé.



Analyse du problème

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

- ▶ On va éviter de se lancer dans une résolution à la main...
- ▶ Le problème revient à trouver α tel que

$$f(\alpha) = K^{0.2} - \frac{\alpha^2(a - b\alpha)}{(1 - \alpha)^2(c - b\alpha)} = 0$$

- ▶ $f(\alpha)$ est une fonction continue $[0, 1[$
- ▶ $f(0) = K^{0.2}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 1} f(\alpha) = -\infty$
- ▶ On peut montrer (avec un peu d'efforts) que cette fonction est monotone.
- ▶ Le théorème des valeurs intermédiaires prévoit qu'il existe une unique valeur de $\alpha \in [0, 1[$ telle que $f(\alpha) = 0$



Implémentation Python

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

```
def ZeroDicho(f, a, b, e):  
    g, d=a, b  
    fg, fd=f(g), f(d)  
    while abs(d-g)>2*e:  
        m=(d+g)/2  
        fm=f(m)  
        if fg*fm<=0:  
            d, fd=m, fm  
        else:  
            g, fg=m, fm  
    return (d+g)/2
```



S'appropriier l'algorithme

Recherches
dichoto-
miques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

- ▶ Proposer une documentation de cette fonction



- ▶ Quelle commande pourrait-on ajouter pour s'assurer que $f(x)=0$ a bien une solution dans l'intervalle considéré ?
- ▶ Exécuter la fonction **ZeroDicho** pour déterminer le taux de conversion de SO_2 et conclure.
- ▶ Comparer le résultat à celui donné par la fonction **bisect** de la bibliothèque `scipy.optimize`.



Analyse de la convergence de l'algorithme

Recherches
dichotomiques

Chercher une
valeur dans
une liste
numérique
triée

Zéro d'une
fonction
continue et
monotone

- ▶ Quelle relation peut on écrire entre a, b, e et le nombre d'itérations p à la fin du calcul ?

- ▶ On prend une précision de la forme $e = 10^{-k}$ où $k \in \mathbb{N}$
Comment évolue le temps de calcul en fonction du nombre de chiffres significatifs du résultat ?