Réflexion sur la mesure en sciences physiques et chimiques

Christophe Boisseleau & Jean-Christophe Pelhate

Formation inter-académique - Académies de Créteil & Versailles

2015-2016



La mesure séduit peu les modernes, [...] c'est un préjugé qu'il faut comprendre et vaincre. [...] On préfère les prophètes, les démagogues, les tyrans, bien souvent, aux arpenteurs du réel, aux comptables sourcilleux du possible.

A. Comte-Sponville (né en 1952)

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

Avant le xvii^e siècle

- Le mot mesure vient du latin "mensura" qui veut dire soit dimension, soit exactitude des proportions
 - Les premières mesures ont donc été celles de longueurs, de poids et de surface de terrain
- La science va s'emparer de la mesure assez tardivement :
 - liée à l'organisation des sociétés humaines et au commerce qui en résultait;
 - l'arpentage de la terre pour acheter les terres fertiles le long du Nil (impôts);
 - ▶ la pesée a été introduite pour le commerce des marchandises.

le xvii^e siècle

- On pouvait distinguer deux types de sciences physiques :
 - une science dite classique :
 - astronomie,
 - la mécanique (au sens de statique),
 - l'hydrostatique,
 - optique géométrique;
 - une science dite expérimentale ou baconienne :
 - chaleur,
 - la lumière,
 - l'électromagnétisme.





le xvii^e siècle

- La science classique était une science démonstrative basée sur la géométrie :
 - pas fondée sur l'expérience,
 - vérification d'une théorie préalablement élaborée,
 - les dispositifs expérimentaux étaient simples et élémentaires;
- Les sciences baconniennes étaient non mathématisées
 - basées sur l'expérience,
 - utilisation d'instruments spécifiquement construits pas des artisans (la pompe à air (1650) de Otto von Guericke(1602-1686)),
 - témoins de l'expérience font fois

Le xix^e siècle ou la naissance de la mesure

- La mesure devient un enjeu majeur à la fin du xviiie
 - en 1776, Lagrange écrit un mémoire intitulé : "Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations"
 - en 1777, Laplace un mémoire ayant à eu près le même titre : "Recherche sur le milieu qu'il faut choisir entre les résultats de plusieurs observations"
- À la fin du xviii^e siècle, les outils mathématiques pour modéliser l'erreur sont quasiment en place :
 - le calcul différentiel.
 - le calcul des probabilités.
- Les philosophes s'interrogent sur les expressions courantes dans les écrits de l'époque :
 - ▶ le plus proche;
 - la meilleure précision ;
 - combiner au mieux.

Le xix^e siècle ou la naissance de la mesure

- Fourier et les fonctions analytiques :
 - donne aux grandeurs définies dans le cadre de la science de la chaleur des valeurs numériques,
 - mathématisation des sciences de la chaleur,
 - la physique exéprimentale entre dans l'ère du quantitatif et de la mesure avec l'apparition de la physique mathématique,
 - fin de la prépondérance de la géométrie début de l'ère de l'analyse.
- Gauss et la mesure absolue :
 - première vraie théorie de l'erreur (fonction gaussienne Theoria combinatus, 1821),
 - une des premières mesure abolue (champs magnétique terrestre (1831))





Débat sur la mesure

- Peut-on vraiment comparer des mesures effectuées avec des instruments différents?
 - ▶ réponse négative de Ernst Mach (1838-1916) et des empiristes logiques (courant opérationnaliste) :
 - l'idée sous jacente à cette prise de position est qu'une grandeur n'est définie que par rapport à la méthode avec laquelle celle-ci est mesurée,
 - la conséquence est qu'ils n'admettent pas que cette grandeur existe sans le processus de mesure lui-même.
 - Aujourd'hui, ce courant est minoritaire, la communauté scientifique dans sa grande majorité pense que la grandeur mesurée existe indépendamment du processus de mesure et que cette grandeur a une valeur que l'on appelle valeur vraie.



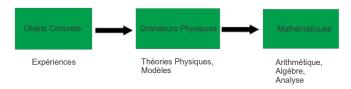


Lord Kelvin (1824-1907)

When you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it.



- Mesurer, c'est quantifier!
 - représenter des propriétés des objets et leurs relations par des relations numériques
 - Problème : comment passer de l'inexactitude du monde physique réel, à l'exactitude du monde mathématique?
 - distinguer plusieurs niveaux et créer des ponts entre ces différents niveaux :



Objectif de l'estimation de l'incertitude

Établir la confiance dans le processus de mesure et dans le résultat numérique.

Cela nécessite :

- mise en place de règles;
- un langage commun;
- des normes communes de manière à être compréhensible par une large communauté.

L'estimation de l'incertitude doit permettre la reconnaissance par les pairs ou l'accréditation.

Plus concrètement, estimer l'incertitude sur une mesure permet de :

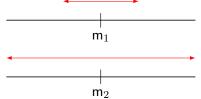
comparer le résultat à une consigne ou une limite



comparer entre eux deux résultats :



quantifier la qualité de la mesure :



La mesure : un enjeu de société

- La mesure est un enjeu citoyen et sociétal
 - sondage;

	Estimation LCI / SOFRES (17-18 avril 2002)	Résultats (21 avril 2002)
J. Chirac	19,5%	19,88%
JM. Le Pen	14,5%	16,86%
L. Jospin	17%	16,18%

- Si on utilise des barres d'erreur, on obtient :
 - J. Chirac $19,5\pm2,4\%$ (k=2) pour un niveau de confiance de 95%;
 - J.-M. Le Pen $14,5\pm2,3\%$ (k=2) pour un niveau de confiance de 95%;
 - L. Jospin $17,0\pm2,4\%$ (k=2) pour un niveau de confiance de 95%.

La mesure : un enjeu de société

- la mesure est partout et touche tous les domaines scientifiques :
 - ingénierie;
 - médecine;
 - économie;
 - sciences humaines;
- problèmes environnementaux;
- la mesure est importante pour l'industrie et les collectivités locales;
- le passage du seuil de pollution n'est validable que si la mesure effectuée s'accompagne d'une incertitude fiable;
- le domaine de la qualité (conformité au cahier des charges);
- au niveau de la sécurité;
- argument de vente;
- dans le secteur industriel les normes sont devenues essentielles.

Le travail sur la mesure et l'estimation des incertitudes permet :

- éveil du sens critique :
 - quel sens donner à la mesure?
 - que vaut mon résultat de mesure?
- maîtrise accrûe des appareils de mesure :
 - savoir lire une notice technique;
 - connaître le vocabulaire technique utilisé par les fabricants.

Développement de compétences spécifiques :

- savoir exprimer un résultat de mesure;
- savoir interpréter un résultat de mesure (incertitude, nombre de chiffres significatifs...).

La mesure touchent à des concepts scientifiques clés :

- la notion de grandeur mesurable; qu'est-ce que je peux mesurer? Comment?
- la notion de dimension et d'unité SI pour exprimer les résultats de la mesure;
- distinction entre erreur et incertitude de mesure;
- analyse statistique des résultats.

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

Les erreurs systématiques ERs

erreurs constantes (ou à variations lentes). Pour un mesurande donné, elles introduisent systématiquement le même décalage. On a alors $ERs = (\hat{X} - X_{vrai})$

- Il est souvent difficile de les détecter.
- Leur origine provient généralement d'un dispositif inadapté ou mal utilisé.
- Mise en évidence des erreurs systématiques :
 - effectuer deux series de mesurage du même mesurande avec deux dispositifs différents faisant si possible appel à des méthodes différentes.
- Un examen de la chaîne de mesure permet de les réduire
 - réétalonnage du capteur
 - choix d'un autre capteur
 - méthode de mesure plus adaptée
- Si l'erreur systématique est connue, on peut s'en affranchir en post-traitement.

Les erreurs aléatoires ERa

fluctuations des observations qui conduisent à des résultats différents d'une expérience à une autre. L'erreur aléatoire peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné qui dépend de notre chaîne de mesure. On a alors : $ERa = x_i - \hat{X}$

Ces erreurs aléatoires sont essentiellement dues :

- aux caractéristiques intrinsèques de la chaîne de mesure;
- aux signaux parasites d'origine électrique ou thermique.

Ces perturbations sur la mesure proviennent :

- de l'électronique associée au capteur et à la chaîne de mesure.
- grandeurs d'influence que l'on ne mesure pas de façon précise

Il est souvent assez difficile d'évaluer les valeurs des erreurs aléatoires ou même leur ordre de grandeur : on fait appel alors à une approche statistique

- Mesure, erreur et incertitude
 - Notion de justesse et de fidélité

Justesse

- donne le degré de concordance entre le résultat obtenu et la valeur vraie
- liée aux erreurs systématiques

Fidélité

- indique le degré de concordance entre les résultats d'une série de mesures d'une même quantité
- liée aux erreurs aléatoires
- s'évalue simplement en répétant les mesures, elle est donc associée aux erreurs aléatoires.

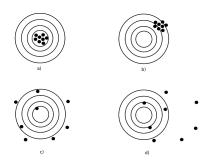


Figure – Cas où l'on connaît la valeur vraie...

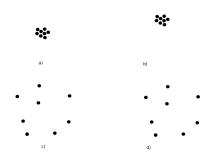


Figure – ...cas où l'on ne connaît pas la valeur vraie

Retour sur l'erreur de mesure

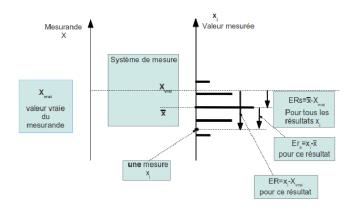


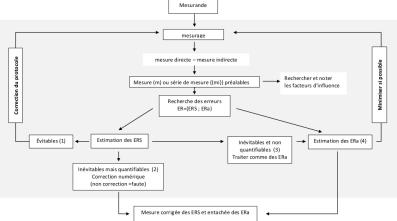
Figure – Retour sur l'erreur de mesure

En conclusion:

- le système de mesure contient tout ce qui est nécessaire pour obtenir une mesure x_i de la valeur du mesurande X;
- on présente le mesurande X_{vrai} à l'entrée du processus de mesure et on réalise N mesure x_i dans les conditions de répétabilité;
- lacktriangle si le mesurage était parfait, toutes les mesures auraient la même valeur $x_i = X_{vrai}$;
- un mesurage n'est jamais parfait et il y a toujours une erreur de mesure $E_R=(x_i-X_{vrai})$ dont on ne peut connaître que l'intervalle d'incertitude;
- tous les résultats sont dispersés autour de la valeur moyenne \overline{x} des N mesures : chaque valeur mesurée x_i est affectée par une erreur aléatoire $ERa = (x_i \overline{x})$;
- souvent, tous les résultats sont décalés de la même quantité $ERs = (\bar{x} X_{vrai})$, erreur systématique de mesurage;

- Mesure, erreur et incertitude
 - Optimisation du protocole

Organigramme optimisation du protocole



- ERa: erreur aléatoire
- ERS : erreur systématique

- (1) : erreurs de parallaxe, non rinçage de la burette, mauvaise appréciation de l'équivalence
- (2) : méthode « amont/aval », correction de la poussée d'Archimède
- (3) : appareil non étalonné, carbonatation sous agitation d'une solution basique au cours d'un
- dosage, électrolyse au cours d'une mesure conductimétrique, évaporation du solvant
- (4) : netteté en optique, mesure de radioactivité, toutes les incertitudes constructeur liées à la classe de l'appareil ...

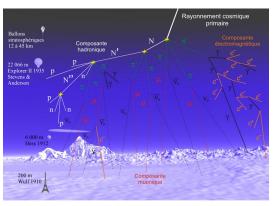
Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

L Deux expériences

Comptage de muons avec le cosmodétecteur

■ Les gerbes de particules



- Les muons cosmiques sont formés à 10 km au dessus du sol
- Mise en évidence de l'effet relativiste des particules

L Deux expériences

Comptage de muons avec le cosmodétecteur

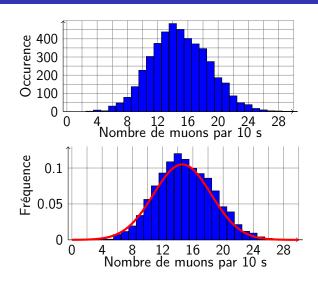
■ Le cosmodétecteur (Sciences à l'École, CPPM)





L Deux expériences

Résultat d'un comptage



Deux expériences

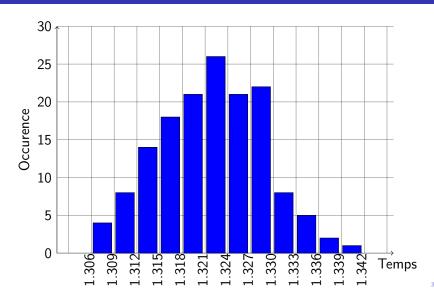
Mesure de la période d'oscillation d'un pendule

- Expérience réalisée 150 fois
 - ▶ angle 20° pas de vitesse initiale, 10 périodes chronométrées.
- Résultats :

1,30	6 1,312	1,313	1,319	1,331	1,309	1,315	1,309	1,316	1,322
1,32	5 1,322	1,322	1,325	1,328	1,316	1,316	1,318	1,319	1,306
1,31	0 1,322	1,325	1,312	1,310	1,322	1,312	1,325	1,318	1,325
1,30	6 1,318	1,313	1,309	1,319	1,329	1,325	1,316	1,328	1,325
1,33	5 1,329	1,331	1,316	1,312	1,312	1,316	1,316	1,318	1,322
1,32	2 1,328	1,313	1,316	1,321	1,319	1,318	1,315	1,319	1,328
1,32	8 1,316	1,332	1,319	1,316	1,316	1,319	1,321	1,312	1,313
1,32	1 1,319	1,319	1,328	1,318	1,328	1,322	1,328	1,325	1,331
1,32	5 1,328	1,322	1,319	1,322	1,315	1,321	1,334	1,321	1,322
1,32	2 1,325	1,328	1,315	1,315	1,331	1,328	1,325	1,328	1,335
1,31	9 1,322	1,328	1,328	1,325	1,322	1,334	1,319	1,331	1,331
1,32	8 1,328	1,334	1,338	1,322	1,322	1,328	1,325	1,322	1,325
1,32	8 1,325	1,325	1,328	1,319	1,331	1,341	1,328	1,319	1,325
1,31	6 1,309	1,313	1,325	1,319	1,322	1,325	1,322	1,322	1,315
1,30	9 1,325	1,325	1,338	1,316	1,322	1,313	1,315	1,331	1,309

Deux expériences

Traitement des résultats du pendule

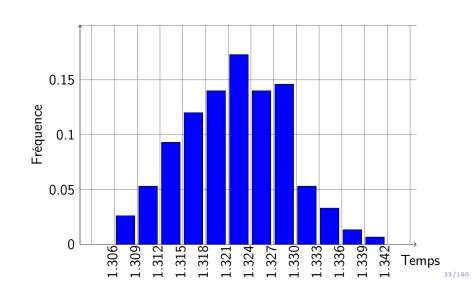


Reflexion sur le mesure

Étude statistique de l'erreur aléatoire

L Deux expériences

Traitement des résultats du pendule

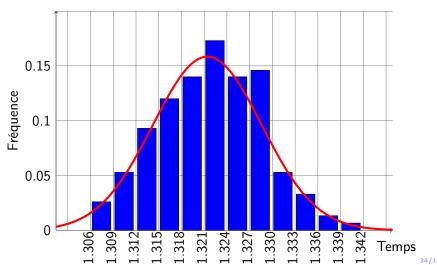


Reflexion sur le mesure

Étude statistique de l'erreur aléatoire

L Deux expériences

Traitement des résultats du pendule



Les fonctions de distribution

Variable aléatoire

Définition

On appelle variable aléatoire une variable X susceptible de prendre différentes valeurs, auxquelles il est possible d'affecter une probabilité p(x).

- Il existe deux types de variables aléatoires :
 - les variables aléatoires discrètes
 - exemple : le dé, la variable aléatoire X est discrète, elle ne peut prendre que 6 valeurs.
 - les variables aléatoires continues
 - la vitesse, la température, la presssion...

Les fonctions de distribution

Loi de probabilité (cas discret)

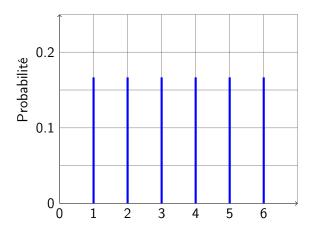
Cas discret

Soit p(x), la probabilité qu'une variable aléatoire discrète X prenne la valeur x. L'ensemble des couples (x,p(x)) est appelé loi de probabilité de la variable aléatoire. Elle peut être représentée par un histogramme.

$$p(x_i) = \lim_{N \to +\infty} \frac{k_i}{N}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p(x_i) = 1$$

- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Les fonctions de distribution

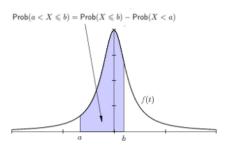


Valeur de la face du dé

Les fonctions de distribution

Loi de probabilité (cas continu)

- Dans le cas continu, la probabilité que X prenne la valeur x est infiniment petite.
 - on considère alors un petit intervalle $\operatorname{Prob}(a < X \leqslant b) = \operatorname{Prob}(X \leqslant b) \operatorname{Prob}(X < a)$



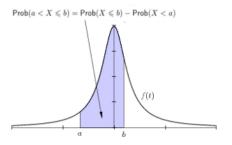
- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Les fonctions de distribution

Loi de probabilité (cas continu)

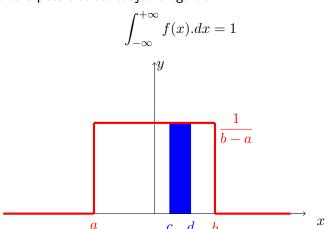
Cas continu

On définit alors la densité de probabilité f(a) par passage à la limite :

$$f(a) = \lim_{b \to a} \frac{\mathsf{Prob}(X \leqslant b) - \mathsf{Prob}(X < a)}{b - a}$$



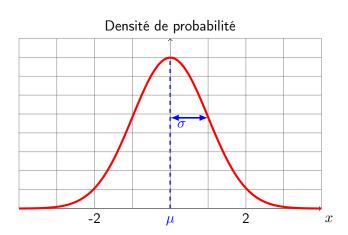
- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Les fonctions de distribution
 - La quantité $\int_c^d f(x).dx$ équivaut à la probabilité que la variable X prenne une valeur située entre c et d.
 - On a la probabilité de tirer une valeur parmi l'ensemble des valeurs possibles est toujours égale à 1.



- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Les fonctions de distribution

Caractérisation des fonctions de distribution

Exemple pour une gaussienne.



Étude statistique de l'erreur aléatoire

Les fonctions de distribution

L'espérance mathématique μ

- son espérance que l'on notera μ ou E(X) qui est l'équivalent en probabilité de la moyenne en statistique.
 - cas continu :

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx$$

cas discret :

$$\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i . p(x_i)$$

Exemple:

dans le lancer d'un dé non truqué, l'espérance vaut :

$$\mu = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

ce résultat est exact et ne dépend pas du nombre de lancers.

Les fonctions de distribution

La variance σ_x^2 ou l'écart-type σ_x

- On caractérise l'étalement par la variance σ_x^2 .
 - cas continu :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) . dx$$

cas discret :

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

Exemple:

dans le lancer d'un dé non truqué, l'écart-type vaut :

$$\sigma_x^2 = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{35}{12}$$

ce résultat est lui aussi exact et ne dépend pas du nombre de lancers.

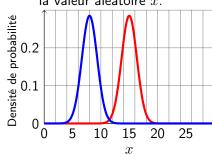
Les fonctions de distribution

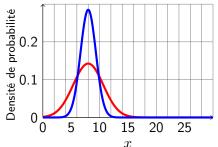
Fonction de distribution gaussienne

 \blacksquare Dans le cas d'une gaussienne, la densité de probabilité f(x) est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

C'est une fonction continue qui décrit la probabilité d'obtenir la valeur aléatoire x.





- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Les fonctions de distribution

Théorème de la limite centrale

- Pourquoi la distribution gaussienne est-elle si importante en métrologie?
 - courbe symétrique
 - semble vraie expérimentalement si on a beaucoup de causes d'erreurs

H.Poincaré (1854-1912)

Tout le monde y croit cependant, me disait un jour M. Lippmann, car les expérimentateurs s'imaginent qu'il s'agit d'un théorême de mathématiques, et les mathématiciens que c'est un fait expérimental.

Les fonctions de distribution

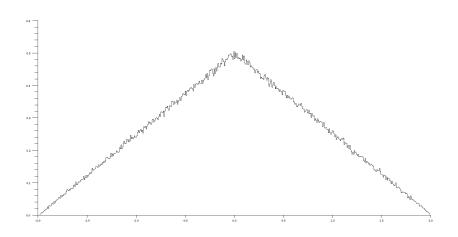
Simulation 1

- On simule 1 000 000 de valeurs centrée sur 0
- On considère deux causes d'erreurs (deux variables aléatoires)
 - ▶ pour chacune,les valeurs tirées peuvent être équiprobables entre [-1;1]
- on tire 1 000 000 de valeurs dans chaque intervalle [-1;1]
- on ajoute terme à terme pour obtenir 1 000 000 de données
- on trace l'allure des nouvelles données

Étude statistique de l'erreur aléatoire

Les fonctions de distribution

Simulation 1 : résultats



Les fonctions de distribution

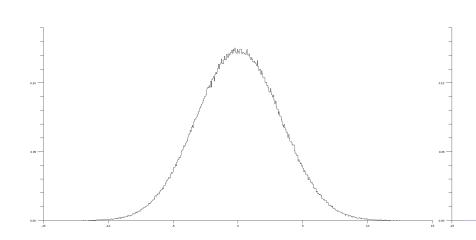
Simulation 2

- On simule 1 000 000 de valeurs centrée sur 0
- On considère 20 causes d'erreurs (20 variables aléatoires)
 - ▶ pour chacune,les valeurs tirées peuvent être équiprobables entre [-a; a]
 - ▶ a est tiré aléatoirement entre [0;1] pour chaque cause d'erreur
- on tire 1 000 000 de valeurs dans chaque intervalle [-a; a]
- on ajoute terme à terme pour obtenir 1 000 000 de données
- on trace l'allure des nouvelles données

Étude statistique de l'erreur aléatoire

Les fonctions de distribution

Simulation 2 : résultats



Étude statistique de l'erreur aléatoire

Les fonctions de distribution

Niveau de confiance

 Les résultats expérimentaux peuvent alors être caractérisés par deux valeurs seulement.

Résultat

Par convention, on écrit :

$$x_{exp} = \mu \pm \Delta x$$

- Écrire le résultat sous cette forme ne nous garantie pas à 100% que notre résultat sera situé entre $\mu \Delta x$ et $\mu + \Delta x$
- Indique seulement une probabilité que notre résultat se trouve entre ces deux bornes.
- On définit alors un niveau de confiance pour notre résultat.

Les fonctions de dist<u>ribution</u>

Niveau de confiance et gaussienne

- La distribution gaussienne est entièrement déterminée par les valeurs μ et σ_x .
- La probabilité d'avoir un résultat compris :
 - ▶ dans l'intervalle $[\mu \sigma_x; \mu + \sigma_x]$ est telle que :

$$\int_{\mu-\sigma_x}^{\mu+\sigma_x} f(x)dx = 0,683$$

▶ dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma_x; \mu + 2\sigma_x]$ est telle que :

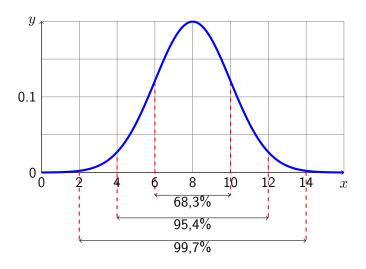
$$\int_{\mu-2\sigma_x}^{\mu+2\sigma_x} f(x)dx = 0,954$$

• dans l'intervalle $[\mu - 3\sigma_x; \mu + 3\sigma_x]$ est telle que :

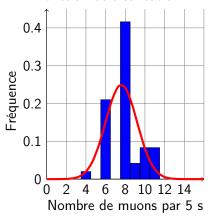
$$\int_{\mu-3\sigma_x}^{\mu+3\sigma_x} f(x)dx = 0,997$$

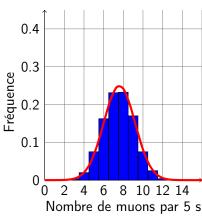
- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Les fonctions de distribution

Niveau de confiance et gaussienne



- Si on faisait un nombre infini d'expériences, nos résultats seraient caractérisés par les fonctions de distribution.
- Plus on a de mesures, plus nos résultats s'approchent de la fonction de distribution.





- Les mesures ne peuvent être faites qu'en nombre limité
- Il est difficile de connaître la distribution de la grandeur physique mesurée X et ainsi de déterminer l'espérance mathématique de la distribution μ et son écart-type σ_x .
- Construire des valeurs qui tiendront lieu d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ_x .
 - Utiliser les statistiques pour pouvoir estimer à la fois l'espérance μ et l'écart-type σ_x .
 - Par analogie avec les définitions théoriques, nous introduirons la valeur moyenne \overline{x} et l'écart-type expérimental s_x .
- Les estimateurs sont donc des indicateurs qui résument à eux seuls certaines caractéristiques de la loi.

- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Échantillonnage et meileure estimation

Meilleur estimateur de l'espérance

La meilleure estimation de l'espérance mathématique μ que l'on peut faire est la moyenne arithmétique notée \overline{x} .

lacksquare Pour N événements d'une variable aléatoire X mesurés, on a :

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

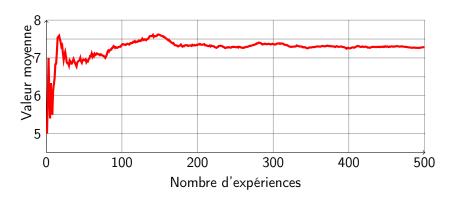
Exemple

on réalise des nombres N différents de lancer de dé, on obtient alors les moyennes

				10000	
\overline{x}	3,2	3,56	3,486	3,5366	3,5010

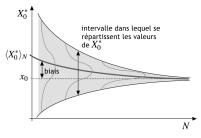
- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Échantillonnage et meileure estimation

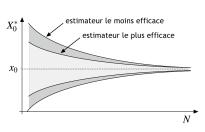
Évolution de la valeur moyenne en fonction du nombre d'expériences



Estimateur cohérent et non biaisé.

Un bon estimateur doit satisfaire à la fois à trois conditions : il doit être cohérent, non biaisé et efficace.





Échantillonnage et meileure estimation

- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Échantillonnage et meileure estimation

Meilleur estimateur de la variance

Meilleur estimateur de la variance

La variance expérimentale s_x^2 est définie de la façon suivante :

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$$

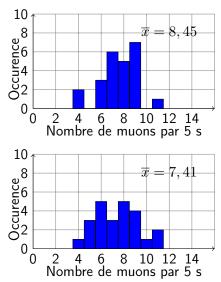
L'écart-type caractérise l'incertitude pour les mesures prises séparément.

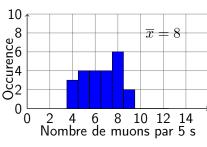
- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Échantillonnage et meileure estimation

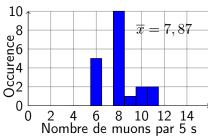
Écart-type de la moyenne

- L'écart-type expérimental ne décroît pas lorsque l'on augmente le nombre de mesures
- Dans le cas de la moyenne, notre meilleure estimation \overline{x} est une combinaison de ces N mesures
 - cette estimation de la moyenne est meilleure lorsque l'on a beaucoup de mesures que lorsque l'on en a qu'une seule.
- Pour l'écart-type, on devrait accéder à une diminution de l'erreur lorsque l'on augmente le nombre de mesures.

- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Échantillonnage et meileure estimation
 - lacktriangle Plusieurs mesurages de N=24 expériences.







Échantillonnage et meileure estimation

Meilleure estimation de l'écart-type de la moyenne $\sigma_{\overline{x}}$

 \overline{x} est une variable aléatoire qui a une distribution gaussienne d'espérance mathématique μ et d'écart-type $\sigma_{\overline{x}}$ appelé écart-type de la moyenne :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

• On ne connaît jamais σ , on ne connaît que s, on en peut donc avoir que le meilleur estimateur de $\sigma_{\overline{x}}$ que l'on note $s_{\overline{x}}$

$$s_{\overline{x}}^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$$

- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Échantillonnage et meileure estimation

Pourquoi faire beaucoup de mesures?

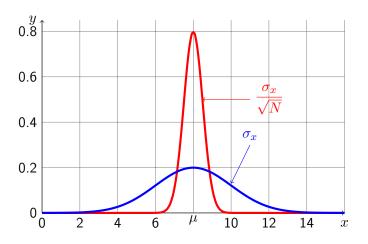


Figure – Écart-type et écart-type de la moyenne

Incertitude

- L'incertitude Δx traduit les tentatives scientifiques pour estimer l'importance de l'erreur aléatoire commise.
- Si Δx est évalué statistiquement, on cherche dans ce cas à caractériser la distribution de probabilité des valeurs de x.
- analyse statistique d'un ensemble de mesures de x
 - I l'estimation de la valeur moyenne est la meilleure estimation de la valeur vraie X_{vrai}
 - ightharpoonup l'incertitude Δx
 - liée à l'estimation de l'écart-type de la distribution
 - définit un intervalle dans lequel la valeur vraie X_{vrai} se trouve avec un niveau de confiance connu.
 - On choisit le plus souvent comme incertitude l'estimation de l'écart-type : on parle alors d'incertitude-type u_x .

Écriture d'un résultat

Pour N mesures $\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$, on peut écrire notre réponse finale pour la détermination de la valeur vraie X_{vrai} :

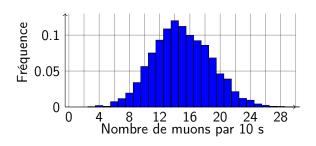
$$x_{exp} = \overline{x} \pm \Delta x$$

- \overline{x} est la moyenne de $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$
- lacktriangle Δx est lié à l'écart-type de la moyenne

$$\Delta x = k \cdot \sqrt{s_x^2} = k \cdot \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

- k le coefficient d'élargissement
- dans le cas où la distribution des valeurs de nos mesures est gaussienne,
 - **•** pour k = 1, on a un à un niveau de confiance de 63,8%,
 - pour k=2, on a un niveau de confiance de 95,4%,
 - pour k=3, on a un niveau intervalle de confiance de 99,7%.

Retour sur le comptage du cosmodétecteur



- On détermine :
 - $ightharpoonup \overline{x}=14,9715...$ muons pour 10 s, soit $\overline{x}=1,49715...$ muons/s
 - $ightharpoonup s_x=3,827...$ muons pour 10 s, soit $s_x=0,3827...$ muons/s
- Pour ce mesurage, N=4530

$$\qquad \qquad \mathbf{s}_{\overline{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = \frac{0.3827286}{\sqrt{4530}} = 0.00568... \; \text{muons/s}$$

Résultat du comptage du cosmodétecteur

Résultat

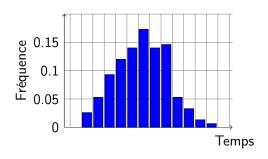
$$x_{exp}=1,497\pm0,006\,\mu/\mathrm{s}$$
 (k=1) pour un niveau de confiance de 68,3%

$$x_{exp}=1,497\pm0,012\,\mu/\mathrm{s}$$
 (k=2) pour un niveau de confiance de 95,4%

$$x_{exp}=1,497\pm0,018\,\mu/\mathrm{s}$$
 (k=3) pour un niveau de confiance de 99,7%

- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Résultats d'une mesure

Retour sur la mesure de la période d'oscillation du pendule



- On détermine :
 - $\overline{x} = 1,321293...$ s
 - $s_x = 0,00723113...$ s
- ${\color{red} \blacksquare} \ \, \text{Pour ce mesurage,} \, \, N=150$

Résultat de la mesure sur la période d'oscillation

Résultat

$$x_{exp} = 1,3213 \pm 0,0006 \, \mathrm{s}$$
 (k=1) pour un niveau de confiance de 68,3%

$$x_{exp}=1,3213\pm0,0012\,\mathrm{s}$$
 (k=2) pour un niveau de confiance de 95,4%

 $x_{exp}=1,3213\pm0,0018\,\mathrm{s}$ (k=3) pour un niveau de confiance de 99,7%

- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Résultats d'une mesure

Les chiffres significatifs

Le guide pour l'expression de l'incertitude de mesure publié par le Bureau International des Poids et Mesures émet les recommandations suivantes :

- les incertitudes seront données avec au plus 2 chiffres significatifs
- "en énonçant les résultats finals, il peut parfois être approprié d'arrondir les incertitudes au chiffre supérieur plutôt qu'au chiffre le plus proche. Par exemple, $u_y=10,47~\mathrm{m}\Omega$ pourrait être arrondi à $11~\mathrm{m}\Omega$. Cependant, le bon sens doit prévaloir et une valeur comme $u_X=28,05~\mathrm{kHz}$ doit être arrondie à la valeur inférieure, $28~\mathrm{kHz}$. Les estimations d'entrée et de sortie doivent être arrondies en accord avec leurs incertitudes ; par exemple, si $y=10,0576\Omega$ avec $u_y=27~\mathrm{m}\Omega$, y doit être arrondi à $10,058~\Omega$."

- Étude statistique de l'erreur aléatoire
 - Résultats d'une mesure

Quoi faire?

- Le professeur peut cependant être amené à imposer une règle plus systématique à ses élèves.
 - par exemple, demander à ce que les incertitudes soient exprimées avec 2 chiffres significatifs et tronquées, par précaution, à l'excès.

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

- Que faire quand on a peu de mesures?

 Distribution Z et distribution T
 - \blacksquare Si on a une variable aléatoire de distribution normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
 - La moyenne \overline{x} des échantillons de n observations est aussi normale $\overline{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
 - On peut définir une variable

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu)}{\sigma}$$

- ▶ représente l'écart entre la moyenne et la valeur vraie rapporté à l'écart-type
- ▶ Z est aussi un variable aléatoire de moyenne nulle et de variance unité : $Z \sim N(0,1)$ avec $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$

conclusion

Lorsque la variance σ^2 d'une distribution normale est connue, la distribution de la moyenne empirique est très simplement ramenée à une distribution normale standard

- Que faire quand on a peu de mesures?

 Distribution Z et distribution T
 - Que se passe-t-il si la valeur vraie μ est connue mais pas l'écart-type σ ?
 - On est conduit à remplacer l'écart-type σ par l'écart-type expérimental s_x dans l'expression Z pour obtenir la variable

$$T = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu)}{s_x}$$

- T peut-être calculée à partir des observations uniquement, car σ ne figure pas dans son expression.
- $ullet s_x$ est une variable aléatoire, ce qui écarte la distribution T d'une simple distribution normale standard.

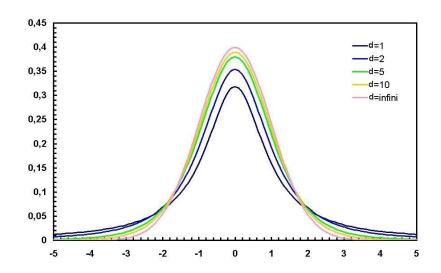
Distribution de Student

La variable aléatoire T suit une loi de Student à k degré de liberté (k>0) :

$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} (1 + \frac{t^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}}$$

Que faire quand on a peu de mesures?

Distribution Z et distribution T



Que faire quand on a peu de mesures?

La loi de Student

Loi de Student

- t(N, P) qui est le coefficent d'élargissement suit la loi de Student à N-1 degrés de liberté.
- Les valeurs de la fonction t(N,P) (N mesures et niveau de confiance P%) sont données dans des tables.
- Voici quelques valeurs du coefficient t (pour N mesures et un niveau de confiance de P%) :

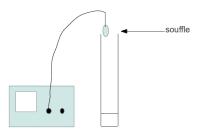
N	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20
P=95%	4,3	3,82	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,20	2,16	2,13	2,09
P=99%	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,11	3,01	2,95	2,86

Loi de Student

- Si N>20 et P=95,4%, on considère que t=2 et donc la distribution gaussienne est une excellente approximation.
- Pour un niveau de confiance P=95%, il y a 95 chances sur 100 pour que la valeur centrale μ de la distribution des observations appartienne à $\overline{x}_N \pm t(95\%)$. $\frac{s_x}{\sqrt{N}}$.
- $flue{\bf A}$ partir de N observations, on définit un intervalle de confiance contenant la valeur centrale μ avec un niveau de confiance défini.
- Cet intervalle sera d'autant plus étroit que le nombre d'observations sera plus grand.

Application de la loi de Student : description de l'expérience

- On cherche à mesurer la fréquence de résonance d'une éprouvette dans laquelle se trouve une hauteur d'eau d.
- Pour faire résonner cette cavité, on souffle perpendiculairement à l'éprouvette.
- Un micro à l'extérieur de l'éprouvette est relié à un oscillosocpe et nous permet de mesurer la fréquence de résonance.



Résultats pour 5 mesures

- On considère que la mesure de la fréquence est une valeur aléatoire dont la distribution suit la loi gaussienne.
- Ces 5 mesures sont un échantillon qui, si il était infiniment grand, suivrait une loi gaussienne.
- On obtient les résultats de mesures suivant :

Fréquence en kHz
1,756
1,778
1,766
1,774
1,762

■ la moyenne

$$\overline{x} = \frac{1,756+1,778+1,766+1,774+1,762}{5} = 1,7672 \; \mathrm{kHz}$$

■ l'estimation de l'écart-type

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^{5} (x_i - 1,7672)^2} = 0.008899438... \text{ kHz}$$

l'estimation de l'écart-type sur la moyenne

$$s_{\overline{x}} = \frac{0,008899438}{\sqrt{5}} = 0,00397995 \text{ kHz}$$

Écriture du résultat pour 5 mesures

D'après la table de student, si je veux un intervalle de confiance de 95% lorsque j'ai 5 mesures (soit 4 degrés de liberté), on a le coefficient de Student t(5,95%)=2,78

Écriture du résultat

On peut alors écrire le résultat du mesurage sous la forme : $f_{exp}=\overline{x}\pm 2,78.\frac{s_x}{\sqrt{N}} \text{ kHz } (t(5,95\%)=2,78) \text{ pour un niveau de confiance de 95\%}.$

Soit : $f_{exp} = 1,767 \pm 0,011$ kHz (t(5,95%) = 2,78) pour un niveau de confiance de 95%.

On obtient les résultats de mesures suivant :

Fréquen	ce en kHz
1,756	1,764
1,778	1,770
1,766	1,770
1,774	1,770
1,762	1,774
1,794	1,774
1,794	1,778
1,804	1,781
1,790	1,781
1,786	1,782

lacksquare la moyenne arithmétique $\overline{x}=1,7774\,\mathrm{kHz}$,

lacktriangle l'estimation de l'écart-type $s_x=$

$$\sqrt{rac{1}{20-1}\sum_{i=1}^{20}{(x_i-1,7774)^2}}=0.0120149...\,\mathrm{kHz}$$

 l'estimation de l'écart-type sur la moyenne 0.0120149

$$s_{\overline{x}} = \frac{0.0120149}{\sqrt{20}} = 0,002686614 \, \mathrm{kHz}$$

Écriture du résultat pour 5 mesures

D'après la table de student, si je veux un intervalle de confiance de 95% lorsque j'ai 20 mesures (soit 19 degrés de liberté), on a le coefficient de Student t(20,95%)=2,09

Écriture du résultat

On peut alors écrire le résultat du mesurage sous la forme : $f_{exp}=\overline{x}\pm 2,09.\frac{s_x}{\sqrt{N}} \text{ kHz } \left(t(20,95\%)=2,09\right) \text{ pour un niveau de confiance de 95\%}$

Soit : $f_{exp} = 1,7774 \pm 0,0056$ kHz (t(20,95%) = 2,09) pour un niveau de confiance de 95%.

Que faire quand on a peu de mesures?

La loi de Student

Mise en situation

On mesure l'accélération de la pesanteur g. Voici les résultats (en $m.s^{-2}$) :

Donner le résultat de la mesure pour un niveau de confiance à 95% (on rejettera éventuellement des valeurs en appliquant le critère de Chauvenet)

A person who never made a mistake never tried anything new A. Albert Einstein (1878 - 1955)

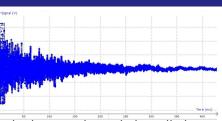
Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

- Faute de temps ou de précision des appareils on ne peut pas toujours observer une variabilité dans les mesures.
- Si on ne dispose que d'une seule valeur pour estimer le mesurande, comment faire pour estimer au plus juste l'incertitude associée à cette grandeur?

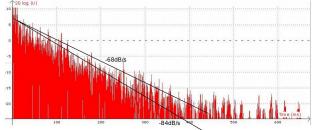


On réalise un "clap sonore" et on fait l'acquisition de la tension U aux bornes d'un micro



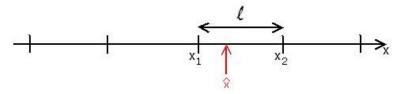
Objectif de l'expérience : Déterminer la durée au bout de laquelle le niveau sonore à chuté de 60 décibels (RT60)

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \log \left(\frac{kU^2}{I_0}\right) \implies L = 20 \log U + cte$$



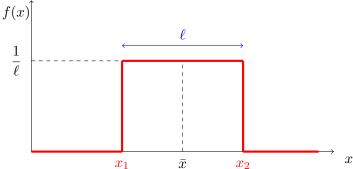
On estime ici être certain que la pente a de la droite qui modélise la décroissance du niveau sonore est comprise entre $-68 \, \mathrm{dB/s}$ et $-84 \, \mathrm{dB/s}$, soit $\hat{a} = 76 \, \mathrm{dB/s}$

- Dans la situation précédente on dispose uniquement d'un encadrement strict de la valeur du mesurande.
- Cette situation est analogue à celle rencontrée lors de l'utilisation d'un appareil de mesure analogique (règle, appareils de mesure à aiguille...) la lecture du résultat de la mesure se fait à l'aide d'une graduation.



Distribution rectangulaire

On considère alors, sans plus d'information, que l'aiguille est située de manière certaine dans l'intervalle $[x_1;x_2]$. On peut estimer l'incertitude liée à la graduation à l'aide d'une distribution rectangulaire.



Cette distribution est normée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{l} dx = \frac{x_2 - x_1}{l} = 1$$

Valeur moyenne :

$$\overline{x} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Que l'on retrouve aussi en considérant la définition de la l'espérance :

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{l} dx = \left[\frac{x^2}{2l} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2l} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

■ Variance et Ecart type :

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

On a $\mu = \overline{x}$ et on pose $y = x - \mu$ on a donc

$$y_1 = x_1 - \overline{x} = -l/2, \ y_2 = x_2 - \overline{x} = +l/2 \text{ et } dy = dx.$$

$$\sigma_X^2 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2}{l} dy = \frac{1}{l} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{3l} \left[y_2^3 - y_1^3 \right] = \frac{1}{3l} \left[\left(\frac{l^3}{8} \right) + \left(\frac{l^3}{8} \right) \right]$$

$$u_X = \sigma_X = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

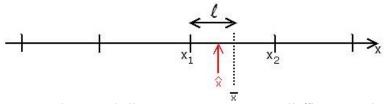
Expression de la décroissance du niveau sonore

$$\hat{a}=\left(rac{\Delta L}{\Delta t}
ight)_{moy}=$$
 76 dB/s et $u_a=rac{16}{\sqrt{12}}=$ 4,61 dB/s

 $a_{exp}=76\pm 9\,\mathrm{dB/s}$ où l'incertitude est exprimée avec un coefficient d'élargissement k=2

Amélioration de l'estimation :

Dans certains cas, l'espacement des graduations et la position de l'aiguille sont tels que l'on peut virtuellement subdiviser la graduation afin de relever plus précisément la position de l'aiguille. Ainsi, si, comme dans l'exemple ci dessous, on est certain que l'aiguille se trouve dans la première moitié de la graduation, on peut dire avec certitude que $\hat{X}\epsilon[x_1;\overline{x}]$.



Cette considération de l'expérimentateur permet d'affiner considérablement le résultat.



- La tolérance indiquée est une garantie constructeur qui assure à l'utilisateur que le composant possède une valeur comprise entre deux limites de tolérance : R-T et R+T.
- $u_R = \frac{l}{\sqrt{12}} \text{ où } l = 2T$

Exemple

Considérons une résistance pour laquelle l'indication constructeur est $1\,\mathrm{k}\Omega$ et une tolérance de $\pm 5\%$.

$$l = 2 \times 0,05 \times 1000 = 100 \,\Omega \Rightarrow u_R = \frac{100}{\sqrt{12}} = 28,86 \,\ldots \Omega$$

Avec un coefficient d'élargissement de 2, on exprimera alors

$$R_{nominale} = (1,00 \pm 0.06) \,\mathrm{k}\Omega$$

Pour la plupart des appareils de mesures à affichage digital présents au lycée, la notice de l'appareil fournit les informations sur sa précision.

- Comme la tolérance d'un composant, la précision d'un appareil désigne un intervalle de certification et ne correspond donc pas directement à l'incertitude sur la mesure effectuée.
- Généralement la précision d'un appareil n'est pas égale à la largeur du plus petit digit. L'examen seul de l'écran d'affichage ne suffit pas à déterminer la précision de l'appareil.

Exemple

On reprend le composant étudié précédemment pour une mesure directe de sa résistance avec un multimètre MX579B.

- Le multimètre affiche alors : $\hat{R}=0.987\,\mathrm{k}\Omega$
- La notice donne la précision de l'appareil : $\pm (0,2\%R_{\rm affich\acute{e}}+2UL)$ (ici UL sigifie "Unité de Lecture")
- Cela donne $u_R = \frac{2 \times (0.2 \times 10^{-2} \times 0.987 + 0.002)}{\sqrt{12}} = 0.00229 \dots kΩ$

On exprime le résultat sous la forme :

 $R_{exp} = (987 \pm 5) \, \Omega$ avec un coefficient d'élargissement de 2

When you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it.

Lord Kelvin (1824-1907)

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

Position du problème

Comment fait-on si la grandeur mesurée n'est pas directement celle dont on cherche à déterminer la valeur?

Exemple:

La réalisation d'un montage volt-ampèremétrique permet la mesure de la tension U aux bornes d'une résistance ainsi que de l'intensité I du courant qui la taverse. On en déduit la valeur R de la résistance par la relation U=RI.

- Question : en admettant connues les incertitudes sur U et I, quelle est l'incertitude sur le résultat final R?
- Pour répondre à cette question, il est nécessaire de relier les incertitudes sur les mesurages de U et I à l'incertitude sur le résultat R. On dit que l'on propage les incertitudes sur U et I à la grandeur R.

Relations de propagation des incertitudes

- Soit X une grandeur dépendant d'un ensemble $\{X_1 \dots X_n\}$ d'autres grandeurs indépendantes : $X = f(X_1 \dots X_n)$
- On réalise le mesurage des différentes grandeurs X_i et on obtient $x_{i, \exp} = \hat{X}_i \pm u_{X_i}$.

$$u_X = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_{\hat{X}_i}^2 u_{X_i}^2}$$

$$X = aX_{1} u_{X} = au_{X_{1}}$$

$$X = X_{1} + X_{2}$$

$$X = X_{1} - X_{2}$$

$$U_{X} = \sqrt{u_{X_{1}}^{2} + u_{X_{2}}^{2}}$$

$$X = a_{1}X_{1} + a_{2}X_{2} u_{X} = \sqrt{a_{1}^{2}u_{X_{1}}^{2} + a_{2}^{2}u_{X_{2}}^{2}}$$

$$X = X_{1}X_{2}$$

$$X = \frac{X_{1}}{X_{2}}$$

$$X = \frac{X_{1}}{X_{2}}$$

$$\frac{u_{X}}{\hat{X}} = \sqrt{\left(\frac{u_{X_{1}}}{\hat{X}_{1}}\right)^{2} + \left(\frac{u_{X_{2}}}{\hat{X}_{2}}\right)^{2}}$$

Exemple:

On considère à nouveau le montage volt-ampèremétrique considéré précédemment. Les différents mesurages nous donnent les résultats suivants : $U_{exp}=2,211\pm0,002\,\mathrm{V}$ et $I_{exp}=2,246\pm0,004\,\mathrm{mA}$ les incertitudes sont données avec un même coefficient d'élargissement k=2 associé à un niveau de confiance de 95%.

Déterminer l'incertitude sur R.

$$\begin{split} \hat{R} &= \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = 984,\!417\,\ldots\Omega; \quad \frac{u_R}{\hat{R}} = \sqrt{\left(\frac{u_U}{\hat{U}}\right)^2 + \left(\frac{u_I}{\hat{I}}\right)^2} \\ u_R &= 984,\!417\sqrt{\left(\frac{1\times10^{-3}}{2,211}\right)^2 + \left(\frac{2\times10^{-6}}{2,\!246\times10^{-3}}\right)^2} = 0,\!98\,\ldots\Omega \\ R_{exp} &= (984\pm2)\,\Omega \text{ où l'incertitude exprimée est l'incertitude élargie} \end{split}$$

avec un coefficient k=2 associé à un niveau de confiance de 95%

- \blacksquare Lors d'un mesurage, on réalise N mesures $\{X_1 \dots X_N\}$ d'une grandeur X
- On veille à éliminer toute erreur systématique
- lacktriangle Le meilleur estimateur de X est sa moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

• Chacune de ces mesures peut être considérée comme une variable aléatoire. Leur moyenne peut être considérée comme une fonction des N variables aléatoires indépendantes $\overline{X} = f(X_i)$.

On obtient l'incertitude type sur la moyenne en propageant les incertitudes $u_{X_i}: u_{\overline{X}}^2 = \sum\limits_{i=1}^N \frac{u_{X_i}^2}{N^2} = \frac{u_{X_i}^2}{N}$

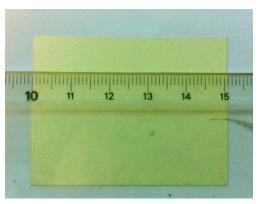
On retrouve ainsi le résultat admis pécédemment :

$$u_{\overline{X}} = \frac{u_X}{\sqrt{N}}$$

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

 $\blacksquare \ \, \text{Mesure de la hauteur } H \text{, la largeur } L \text{ et de la masse } m \text{ du post-it.}$



- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la largeur et de la hauteur du post-it

- On utilise une règle graduée au millimètre (supposée bien calibrée).
- On positionne l'un des bords au niveau de la graduation 10 cm.
- Il faut repérer alors deux positions X_A et X_B .
 - Chaque bord doit d'abord être pointé, puis on lit la graduation associée au pointage.
 - Pour chaque bord, on doit donc considérer une incertitude-type liée au pointage $u_{\mathsf{point\acute{e}}}$ et une incertitude-type liée à la graduation $u_{\mathsf{graduation}}$.
 - Ces deux incertitudes ne sont pas toujours du même ordre de grandeur et l'une peut souvent être négligée devant l'autre.

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la largeur et de la hauteur du post-it







- Pour le papier $u_X = \sqrt{u_{\mathsf{point\acute{e}}}^2 + u_{\mathsf{graduation}}^2}$ Les deux termes sont du même ordre de grandeur.
- Pour la plante l'incertitude de pointé (en haut comme en bas) est largement supérieure au millimètre. On négligera alors l'incertitude de graduation devant l'incertitude de pointé.

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la largeur et de la hauteur du post-it

Estimation de la largeur

- On pointe chaque bord : $x_q = 10,00$ et $x_d = 15,08$
- lacksquare On estime donc la largeur à $\hat{L}=5{,}08\,\mathrm{cm}$
- En considérant que l'incertitude-type sur le bord de gauche est égal à l'incertitude type sur le bord de droite, on a

$$u_{X_g} = u_{X_d} = \frac{1}{\sqrt{12}} \text{ mm}$$

$$u_l = \sqrt{u_{X_g}^2 + u_{X_d}^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.4082 \dots \text{ mm}$$

- On obtient $U(L)=0.8165\ldots$ mm avec un coefficient d'élargissement de 2.
- \blacksquare On écrira donc le résultat sous la forme : $L_{exp} = (5,08 \pm 0,08) \ {\rm cm} \ {\rm où} \ {\rm l'incertitude} \ {\rm est} \ {\rm exprimée} \ {\rm avec} \ {\rm un} \ {\rm coefficient} \ {\rm d'élargissement} \ {\rm de} \ 2$

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la largeur et de la hauteur du post-it
 - A l'œil nu on peut dire avec certitude que le bord gauche est positionné au niveau d'une graduation supérieure à 15,05. On peut affiner le l'incertitude : $u_{X_d} = \frac{0,5}{\sqrt{12}} = 0,1443\dots$ mm.
 - De même, le bord gauche sur la graduation 10. Si ce positionnement est méticuleux l'incertitude de lecture se restreint à l'épaisseur de la graduation. Elle est donc très faible devant l'incertitude de graduation du bord droit.
 - L'incertitude sur une mesure de largeur avec une règle graduée peut donc être estimée avec une valeur inférieure au millimètre : soit, avec un coefficient d'élargissement de 2, on obtient $U(L)=0.288\,6\,\ldots\,$ mm.

Estimation plus fine de la largeur

On peut donc écrire le résultat donc le résultat sous la forme : $L_{exp}=(5,08\pm0,03)\,\mathrm{cm}$ où l'incertitude est exprimée avec un coefficient d'élargissement k=2

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la largeur et de la hauteur du post-it

Estimation de la hauteur

On procède de la même manière pour :

- On détermine la position chacun des bords : $x_h = 10,00$ et $x_h = 13,81$.
- lacksquare On estime donc la largeur à $\hat{H}=3.81\,\mathrm{cm}$
- En considérant que l'incertitude-type sur le bord du bas est égal à l'incertitude type sur le bord du haut, on a

$$u_{X_b} = u_{X_h} = \frac{1}{\sqrt{12}} \text{ mm}.$$

$$u_H = \sqrt{u_{X_b}^2 + u_{X_h}^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,4082 \,\mathrm{mm}$$

 \blacksquare On écrira donc le résultat sous la forme : $H_{exp}=(3,81\pm0,08)\,\mathrm{cm}$ avec un coefficient d'élargissement de 2.

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la surface du post-it

Estimation de la surface

L'estimateur de la surface se détermine alors directement par $\hat{S} = \hat{H} \times \hat{L} = 3,81 \times 5,08 = 19,3548 \dots \text{ cm}^2$

 \blacksquare Avec un coefficient d'élargissement de 2, on obtient donc que : $S_{exp}=(19,4\pm0,5)\,\rm cm^2$

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la masse d'un post-it

Lors d'une pesée, de nombreux postes d'incertitudes peuvent être pris en compte :

- la précision d'affichage : intervalle entre deux valeurs consécutives pouvant être affichées par la balance. La résolution en charge et la résolution à vide sont deux postes d'incertitude liés à la précision d'affichage.
- la non-linéarité : la caractéristique de pesage est représentée par une droite passant par la charge nulle et par la charge maximale. La non-linéarité définit la largeur de la bande à l'intérieur de laquelle peut avoir lieu un écart positif ou négatif de la valeur de mesure par rapport à la caractéristique idéale.
- la répétabilité : faculté d'une balance à afficher des valeurs de mesures identiques lors de pesées répétitives du même objet, de la même manière et dans les mêmes conditions.

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la masse d'un post-it
 - l'excentration : variation de l'affichage en fonction de la position de l'objet sur le plateau;
 - influence de la température;
 - influence de la masse volumique de l'air;
 - incertitude sur les poids étalons;
 - \blacksquare ... www.instrumexpert.com/.../975 Balances%20 %20 Calibration.pdf .

Les balances utilisées dans les collèges et lycées, sont généralement fournies avec une notice détaillant ses caractéristiques techniques. On pourra les utiliser avec profit pour sensibiliser les élèves à l'estimation d'incertitudes. Le professeur choisira l'activité en fonction :

- de son public;
- des informations techniques dont il dispose;
- du temps qu'il peut consacrer à l'estimation de l'incertitude de mesure.

Estimation de la masse d'un post-it

Estimation de la masse m d'un post-it : \hat{m}

On utilise une balance "EXACTA" de modèle P12. L'affichage digital donne une indication à 0,01 g près. Pour augmenter la précision de la mesure, on mesure la masse M d'un bloc de 24 post-it. On lit l'indication sur la balance : $\hat{M}=3,22$ g. On a donc

$$\hat{m} = \frac{\hat{M}}{24} = 0,134166...$$
 g.

La notice de la balance précise les caractéristiques suivantes :

- lacktriangle précision : d=0,01 g;
- linéarité : $l = \pm 0,01$ g;
- répétabilité (sd) :r = 0,005 g;
- dérive de +10 °C à +30 °C : $t=\pm 5$ ppm/°C.

Estimation de la masse d'un post-it

On fait le choix suivant :

 $lue{}$ la résolution en charge est considérée comme une variable aléatoire de distribution rectangulaire de largeur d:

$$u_{\rm charge} = \frac{d}{\sqrt{12}} = 2,887 \, \dots \, \times 10^{-3} \, {\rm g} \, ;$$

■ la résolution à vide est considérée comme une variable aléatoire de distribution rectangulaire de largeur *d* :

$$u_{\sf zero} = \frac{d}{\sqrt{12}} = 2,887 \, \dots \, imes 10^{-3} \, {\sf g} \, ;$$

lacktriangle la linéarité est considéré comme une variable aléatoire de distribution rectangulaire de largeur 2l :

$$u_{\text{lin}} = \frac{2l}{\sqrt{12}} = 5,774 \dots \times 10^{-3} \,\text{g};$$

- l'incertitude type liée à la reproductibilité est directement donnée par l'indication $u_r = 5 \times 10^{-3}$ g;
- on négligera l'incertitude liée à la température.

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la masse d'un post-it

Calcul de l'incertitude de pesée

$$u_M = \sqrt{u_{\text{charge}}^2 + u_{\text{zero}}^2 + u_{\text{lin}}^2 + u_r^2} = 8,66 \dots \times 10^{-3} \,\mathrm{g}$$

Avec un facteur d'élargissement de 2 on peut considérer que $U(M)=0.017\ldots {\rm g}$ soit $U(m)=7.2\ldots \times 10^{-4}\,{\rm g}$

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Estimation de la masse d'un post-it

On dit souvent que le vieillissement des appareils dans les établissements, élargit considérablement les incertitudes de mesure. Nous pouvons, sur cet exemple, déterminer la répétabilité des mesures en réalisant une série de mesures.

Vérification de la répétabilité :

On effectue 32 fois la pesée du bloc de post-it.

- Moyenne : $\overline{M} = 3,2242 \ldots g$
- Écart type expérimental : $s_M = 0,009\,02\ldots g$

Estimation de la masse d'un post-it

Conclusions

- On constate que l'incertitude liée à la répétabilité est 2 fois plus grande que celle prévue par la notice. En substituant le résultat trouvé à la reproductibilité annoncée, on obtient $u_M=1{,}146\ldots\times 10^{-2}\,\mathrm{g}$ d'où, $U(M)=2{,}3\ldots\times 10^{-2}\,\mathrm{g}$ (soit $U(m)=9{,}6\ldots\times 10^{-4}\,\mathrm{g}$.
- S'il est vrai que l'on constate un élargissement de l'incertitude par rapport à celle prévue par la notice l'ordre de grandeur reste le même, à savoir quelques digits. Il peut être intéressant de faire remarquer aux élèves, sur l'exemple de la pesée avec une balance à affichage numérique que la précision de l'affichage ne donne pas l'incertitude sur la mesure.
- Pour cette mesure nous retiendrons donc $m=(0,134\pm0,001)\,\mathrm{g}$ où l'incertitude est exprimée avec un coefficient d'élargissement de 2

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Détermination de la masse surfacique du post-it

Détermination de la masse surfacique

Il ne reste plus qu'à propager les estimateurs et les incertitudes à la masse surfacique :

$$\begin{split} \hat{\Sigma} &= \frac{\hat{m}}{\hat{L}\hat{H}} = \frac{0,134}{5,08\times3,81} = 6,923\ldots\times10^{-3}\,\mathrm{g\cdot cm^{-2}} \\ \hat{\Sigma} &= 69,23\ldots\mathrm{g\cdot m^{-2}} \\ \mathrm{Et}\ \frac{u_{\Sigma}}{\hat{\Sigma}} &= \sqrt{\left(\frac{u_L}{\hat{L}}\right)^2 + \left(\frac{u_H}{\hat{H}}\right)^2 + \left(\frac{u_m}{\hat{m}}\right)^2} \\ u_{\Sigma} &= 6,923\times10^{-3}\sqrt{\left(\frac{0,04082}{5,08}\right)^2 + \left(\frac{0,04082}{3,81}\right)^2 + \left(\frac{9,6\times10^{-4}}{0,134}\right)^2} \end{split}$$

$$u_{\Sigma} = 1{,}051\,479\,\ldots\, imes 10^{-4}\,\mathrm{g\cdot cm^{-2}}$$

On écrira donc le résultat sous la forme :

 $\Sigma_{\rm exp}=(69,2\pm2,1)\,{\rm g\cdot m^{-2}}$ où l'incertitude est exprimée avec un coefficient d'élagissement de 2

- Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
 - Détermination de la masse surfacique du post-it

- D'après le résultat précédent on peut raisonnablement considérer que Σ_{vraie} à de bonnes de chances de se trouver dans l'intervalle de confiance $[67,1\,\text{g/m}^2;71,3\,\text{g/m}^2]$.
- Cet intervalle nous permet de dire que le papier utilisé pour réaliser ce post-it sera vraisemblablement annoncé avec un grammage de 70 g/m² mais certainement pas 80 g/m².
- Si l'on ne réalise pas une étude, même sommaire, des incertitudes liées aux différentes mesures et convenablement propagées, on ne peut tout simplement pas conclure.

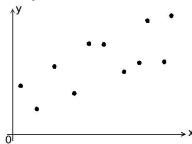
La joie ne se mesure pas. Jacques Meunier (1941-2004)

Plan de la présentation

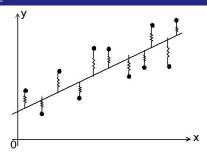
- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

- Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
 - Présentation de la méthode

On réalise le mesurage d'un ensemble de couples de valeurs $\{x_i,y_i\}$. On place alors sur un graphique l'ensemble des points expérimentaux de coordonnées $\{x_i,y_i\}$ obtenus.



Présenta<u>tion de la méthode</u>



- Imaginons que chaque point expérimental soit relié à une barre représentant la droite de régression linéaire par un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle.
- La barre est alors en équilibre mécanique stable si son énergie potentielle élastique est minimale.
- Si on note L_i l'élongation du ressort assossié au point (x_i,y_i) , l'énergie potentielle élastique de la barre est minimale si $\sum\limits_i^N L_i^2$ est minimale

Présentation de la méthode

La méthode des moindres carrés consiste donc à chercher l'équation de la droite $\hat{y}=\hat{a}x+\hat{b}$ par mis tous les ax+b possibles, qui minimise la grandeur

$$C = \sum_{i}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

• Cela revient alors à chercher les valeurs de a et b telles que :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{\hat{a}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial C}{\partial b}\right)_{\hat{b}} = 0$$

- Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
 - Coefficients de régression linéaire

En explicitant la condition précédente, on obtient alors une expression des coefficients de régression linéaire :

$$\hat{a} = \frac{\sum\limits_{i}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i}^{N} (x_i - \overline{x})^2} \quad \text{et} \quad \hat{b} = \overline{y} - \hat{a}\overline{x}$$

■ Chaque expérience réalisée, permet de placer sur le graphe un point de coordonnées (x_i,y_i) . L'ensemble de ces points est supposé normalement distribué par rapport à la droite de régression linéaire. Pour chaque point, la distance à la droite $r_i = y_i - \hat{y}_i$ (appelée "le résidu") traduit l'erreur que commise lors de chaque mesure.

- Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
 - Coefficients de régression linéaire

On quantifie alors la dispersion des points expérimentaux par rapport au modèle selon la relation :

$$s_{stat} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{a}x_i - \hat{b})^2}$$

Remarques:

- Le coefficient N-2 correspond au nombre de degrés de liberté de l'échantillon. Dans le cas d'une modélisation linéaire (de la forme $y=\hat{a}x$) il conviendrait de le remplacer par N-1
- Dans le cas où l'on suppose que les x_i sont parfaitement déterminés, c'est à dire $u_{x_i}=0$ alors on identifie $s_{stat}=u_y$

- Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
 - Coefficients de régression linéaire

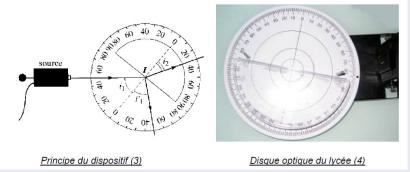
Les écarts types expérimentaux des coefficients \hat{a} et \hat{b} et donc leurs incertitudes-types découlent de s_{stat} par simple propagation des écarts-types :

$$u_{\hat{a}} = \frac{s_{stat}}{\sqrt{\sum_{i}^{N} (x_i - \overline{x})^2}} \qquad \text{et} \qquad u_{\hat{b}} = s_{stat} \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i}^{N} (x_i - \overline{x})^2}}$$

- Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
 - Coefficients de régression linéaire

Mise en situation : Validation de la loi de Descartes

Utilisons la méthode des moindres carrés pour une analyse quantitative du phénomène de réfraction. On dispose d'un pinceau de lumière qui pénètre dans une cuve hémisphérique remplie d'eau. Au niveau du dioptre plan, le faisceau entre dans l'eau avec un angle d'incidence i. Il est alors réfracté et poursuit son chemin dans l'eau avec un angle de réfraction r.



- Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
 - Coefficients de régression linéaire

Mise en situation : Validation de la loi de Descartes

On mesure i et r pour différentes orientation de la cuve et on reccueille les différentes valeurs lues dans le tableau ci-dessous :

k	i_k (degrés)	r_k (degrés)			
1	0	0			
2	10	7,3			
3	20	14,5			
4	30	22			
5	40	29			
6	50	35			
7	60	40			
8	70	45			

L'objectif de l'étude est de vérifier la validité de la loi de Descartes :

$$n_{air}\sin(i) = n_{eau}\sin(r)$$

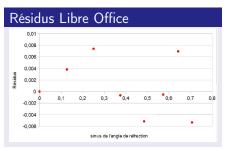
Faute de temps, on omet très fréquemment de discuter de la pertinence du modèle choisi. Pourtant c'est une étape essentielle préliminaire à toute conclusion qui est souvent riche en informations. Plusieurs indicateurs sont à notre disposition pour conclure.

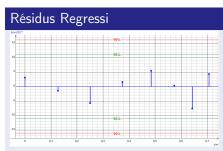
- L'analyse visuelle du graphique
- L'analyse qualitative des résidus
- Le coefficient de correlation

Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés

Interprétation des résultats

L'analyse graphique des résidus permet une étude plus fine de la répartition des points autour du modèle.





L'analyse qualitative des résidus est un indicateur simple et efficace de validité du modèle qui est pertinent même lors d'une modélisation non linéaire.

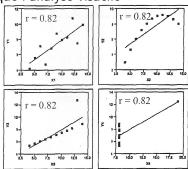
Le coefficient de corrélation quantifie la "corrélation" entre deux grandeurs X et Y et pour lesquelles on a effectué un mesurage donnant $\{x_i,y_i\}$. Il est défini par :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - \overline{y})^2}}$$

- Il est compris entre -1 et +1. Les outils de régression linéaires affichent souvent r^2 (coefficient de détermination) qui est compris entre 0 et 1.
- Si $r^2=1$ les points expérimentaux sont parfaitement alignés
- Si $r^2 = 0$ il n'y a pas de corrélation entre X et Y.

Cet indicateur de "corrélation" pourtant fréquemment utilisé n'est pas un bon indicateur pour valider, à lui seul, la petinence d'un modèle linéaire (ou affine).

- C'est un indicateur dont l'origine statistique échappe aux élèves qui devront le manipuler sans en comprendre l'origine.
- Que fait-on si $r^2 = 0,96$? Quel est le critère de validation à retenir.
- Dans la plupart des expériences réalisables au lycée, $r^2 > 0,99$.
- Moins efficace que l'analyse visuelle



Problème des constantes.

- Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
 - Mises en situation

Mise en situation : Déterminer la constante de raideur d'un ressort

On fixe un ressort à une potence et on accroche à l'autre extrémité divers objets de masses différentes. On mesure l'élongation $L=l-l_{\rm vide}$ du ressort pour les différentes masses.

i	m_i (kg)	L_i (m)
1	0,00997	0,013
2	0,02015	0,025
3	0,03012	0,038
4	0,05007	0,063
5	0,06004	0,075
6	0,07022	0,088
7	0,08019	0,105
8	0,10021	0,126
9	0,11018	0,138
10	0,12036	0,150



└Mises en situation

Mise en situation : Déterminer la concentration de la solution

On utilise la loi de Beer Lambert pour déterminer la concentration inconnue C_X d'une solution de diiode. On dispose d'une série de solutions étalons de concentrations connues et d'un spectrophotomètre permettant de mesurer leurs absorbance. La solution de concentration inconnue à une absorbance pour la longueur d'onde choisie de $A_X=0,152$.

Concentration (en mol/L)	Absorbance lue			
$5,0 imes 10^{-5}$	0,003			
$1.0 imes 10^{-4}$	0,006			
2.0×10^{-4}	0,013			
5.0×10^{-4}	0,031			
$1.0 imes 10^{-3}$	0,063			
$2.0 imes 10^{-3}$	0,123			
3.0×10^{-3}	0,187			
$5,0 imes 10^{-3}$	0,310			

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

- Soit un ensemble de n couples $\{(x_i,y_i)\}$ que l'on sait relier par une loi $y=f(x,\overrightarrow{\theta})$ avec $\overrightarrow{\theta}=\theta_1,\theta_2,\ldots$ est l'ensemble des paramètres inconnus.
- L'ajustement de f aux données $\{(x_i,y_i)\}$ consiste à trouver la valeur des paramètres $\overrightarrow{\theta}$ qui correspondent le mieux aux données.
- On va créer une grandeur qui mesure l'accord entre les mesures et la courbe théorique
 - ightharpoonup cette mesure va dépendre des paramètres $\overrightarrow{ heta}$
 - ▶ la valeur des paramètres donnant le meilleur accord sera choisie comme estimateur de ces paramètres

Les paramètres optimaux devront minimiser la grandeur :

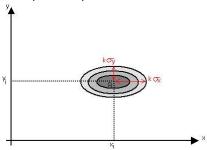
$$K^2(\overrightarrow{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f(x_i, \overrightarrow{\theta})}{u_{x_i y_i}}\right)^2$$
 avec
$$u_{x_i y_i} = \sqrt{u_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial f(x_i, \overrightarrow{\theta})}{\partial x}\right)_{x_i}^2 u_{x_i}^2}$$

 \blacksquare Il faut résoudre par rapport aux paramètres $\overrightarrow{\theta}$ le système d'équations :

$$\frac{\partial K^2(\overrightarrow{\theta})}{\partial \overrightarrow{\theta}} = 0$$

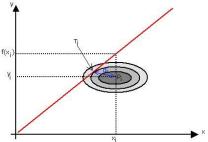
Signification qualitative

- Hypothèse : incertitudes ont des distributions normales. Dans ce cas chaque point de mesure suit une loi normale, alors la fonction à minimiser s'apparente à un test de χ^2
- Les courbes d'isodensités de probabilités forment des ellipses centrées autour du point expérimental :



Signification qualitative

Au niveau de chaque point expérimental, on considère la distance entre le point expérimental (P_i) et le point du modèle tangent à l'ellipse d'incertitude d'aire la la plus petite (T_i) .



■ La minimisation de K^2 par rapport à $\overrightarrow{\theta}$ permet de trouver le modèle passant *au plus près* des points expérimentaux.

- Le système ne peut généralement pas se résoudre analytiquement. Utilisation des algorithmes de minimisation numérique.
- L'estimateur de $\overrightarrow{\theta}$ est donné par la valeur $\overrightarrow{\widehat{\theta}}$ qui minimise $K^2(\overrightarrow{\theta})$
- \blacksquare On alors $K^2_{min} = K^2(\hat{\overrightarrow{\theta}})$ la valeur minimale de K^2
- lacksquare La valeur K^2_{min} doit être petite si la fonction ajustée décrit les données de manière satisfaisante
- Cette grandeur mesure donc la qualité de l'ajustement

Analyse de la pertinence de la modélisation

- K_{min}^2 est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi de χ^2 à $\nu=N-p$ degré de liberté
- N est le nombre de mesures réalisées
- p est le nombre de paramètres du modèle (nombre de dimension du vecteur $\overrightarrow{\theta}$)
- ullet (N-p) représente le nombre de degrés de liberté de la modélisation
- Afin d'obtenir une grandeur dont on peut discuter de la valeur indépendamment du nombre de mesures réalisées, on définit alors :

$$K_{r\,min}^2 = \frac{K_{min}^2}{N - p}$$

Analyse de la pertinence de la modélisation

On peut interpréter qualitativement la valeur de $K^2_{r\,min}$ de la manière suivante :

- Si $K_{r\,min}^2 \gg 1$, la loi n'est pas validée. Cela peut être dû à une sous-estimation des incertitudes de mesures ou bien le type de modélisation choisi n'est pas correct.
- Si $K_{r\,min}^2 \approx 1$, la loi est validée. Bon accord entre la répartition des points expérimentaux et la droite de régression linéaire.
- Si $K_{r\,min}^2 \ll 1$, on ne peut pas conclure. Les incertitudes de mesures ont certainement été largement surestimées.

Analyse de la pertinence de la modélisation

On peut définir la *p-value*, qui est la probabilité de faire un ajustement dont le résultat serait pire que celui observé. C'est donc la probabilité de trouver un K^2_{min} plus grand que celui obtenu. Elle est donnée par la densité de probabilité f_{χ^2} de la loi du χ^2

■ La *p-value* quantifie également la qualité de l'ajustement

$$p - value = \int_{K_{min}^2}^{+\infty} f_{\chi^2}(x; \nu) dx$$

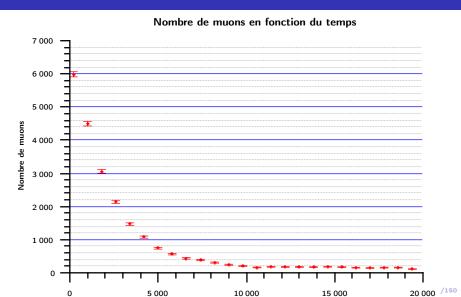
| χ 2 /

les tables de données permettent de déterminer les p-values connaissant $K_{min}^2 \nu$

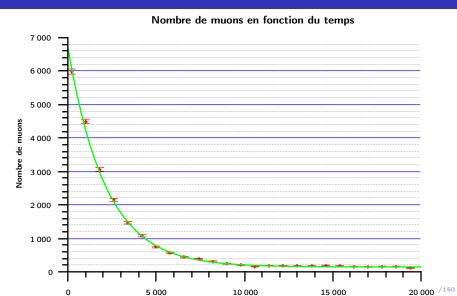
TAB	LE DU CI	HI-DEUX	: χ ² (n)						p	_
n ^p	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19.021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638

Exemple : temps de vie du muon

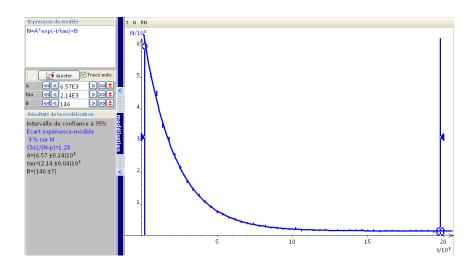
Avec un tableur



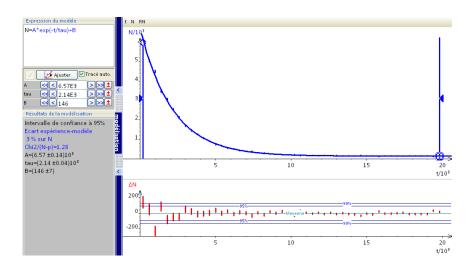
Avec un tableur



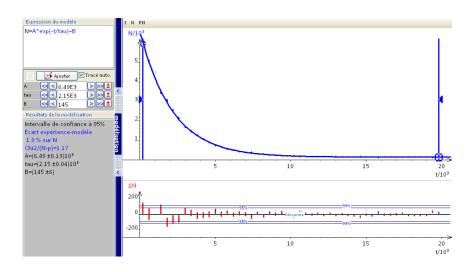
Avec Regressi



Avec Regressi



Avec Regressi



Conclusion

Le modèle retenu est : $N = A \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B$

- $au = 2,15 \pm 0.04 \; \mu s$
- $A = (6,49 \pm 0,13) \times 10^3$
- $B = 145 \pm 6$

L'incertitude sur τ est directement donnée par le logiciel (Regressi, par exemple) ou caculée par d'autres méthodes (Monte-carlo)

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Mesure, erreur et incertitude
- 3 Étude statistique de l'erreur aléatoire
- 4 Que faire quand on a peu de mesures?
- 5 Estimations de type B
- 6 Propagation des incertitudes
- 7 Exemple d'étude complète : estimation de la masse surfacique d'un post-it
- 8 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 9 Méthode du χ^2
- 10 Bibliographie

Bibliographie



D. Barchiesi.

Mesure physique et instrumentation.



F.-X. Bally & J.-M. Berroir.

Incertitudes expérimentales.

http://poisson.ens.fr/Ressources/incertitudes.pdf, Polycopié de cours du centre de préparation interuniversitaire à l'agrégation de physique de Montrouge, 2008.



F.-X. Bally & J.-M. Berroir.

Incertitudes expérimentales.

Bulletin de l'Union des Physiciens, 928 :995-1019, Novembre 2010.



P. Bogaert.

Probabilités pour scientifiques et ingénieurs.

de Boeck, 2008.



F. Laffont & E. Mathieu C. Joffin.

Mesure et instrumentation.

Casteilla, 2012.



B. Clément.

Analyse de données en sciences expérimentales.

Dunod, 2012.



J. Collot.

Erreur, probabilité statistique.

http://isnwww.in2p3.fr/atlas/cours/index.html, Polycopié du cours de physique expérimentale des hautes énergies du DEA de Physique Théorique Rhône-Alpin, 2001.



Inspection générale.

Mesure et incertitudes.

Bibliographie

 $\label{lem:http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/07/0/yceeGT_ressources_MathPC_Mesure_et_incertitudes_eduscol_214070.pdf, 2012.$



J. Perdijon.

La mesure : histoire, science et philosophie. Dunod, 2004.



K. Protassov.

Probabilités et incertitudes dans l'analyse des données expérimentales. Presses Universitaires de Grenoble, 1999.



P. R. Bevington & D. K. Robinson.

Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences. McGraw-Hill Higher Education, 2003.



G. L. Squires.

Practical physics.

Cambridge University Press, 1984.



J. R. Taylor.

An introduction to Error Analysis.

University Science Books, Sausalito, 1997.



A. Jardy & J. Vial.

Outils pour l'exploitation et l'expression des résultats de mesures physico-chimiques.

Document de formation d'un stage organisé par l'ESPCI et l'UPS, 2012.



A. Bernard & J-L Vidal.

Incertitudes.

http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/spc/file/doc/1STI2D/vidal/mesure.pdf,Lycée des Catalins, Montélimar, académie de Grenoble, 2011.