# Pourquoi un document sur les incertitudes ?

## Exemple :

Un technicien doit vérifier la conformité d'une pièce mise en pré-production. Il extrait un exemplaire de cette pièce qui comporte une tige de longueur consigne 80 mm. La mesure de la longueur de la tige de l'exemplaire choisi donne 78 mm
La procédure de réalisation est-elle conforme aux attentes ?

L'objectif principal de ce document est de présenter des outils et des méthodes de validation pour conclure lors d'une expérience de TP ou de TIPE. Ces outils sont issus du monde industriel selon les recommandations du Bureau International des Poids et Mesures.

# 1 Variabilité et répétabilité des mesures

## 1.1 Observation de la variabilité des mesures

Lorsqu'on met en œuvre un procédé de mesure d'une grandeur physique (on dit que l'on réalise le **mesurage** d'un **mesurande**) et que l'on répète plusieurs fois, le résultat du mesurage peut être différent d'une expérience à l'autre (variabilité du résultat).

**Exemple 1 :** On mesure le nombre de muons cosmiques qui traversent les plaques d'un détecteur par unité de temps.

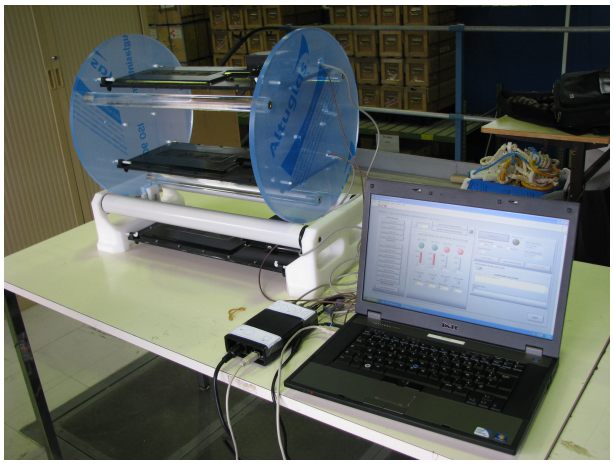


Figure 1 – Le détecteur de muon

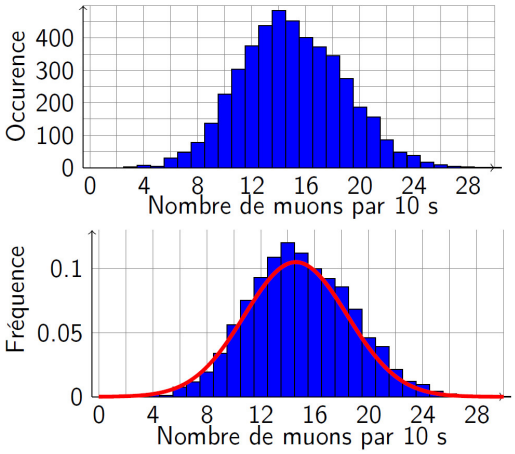



Figure 2 – Résultats du mesurage

**Exemple 2 :** On mesure 20 fois la distance entre une maison et une antenne relais.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distance (en km) | 1,756 | 1,762 | 1,764 | 1,766 | 1,770 | 1,770 | 1,772 | 1,774 | 1,774 | 1,774 |
| | 1,778 | 1,778 | 1,781 | 1,781 | 1,782 | 1,786 | 1,790 | 1,794 | 1,794 | 1,804 |

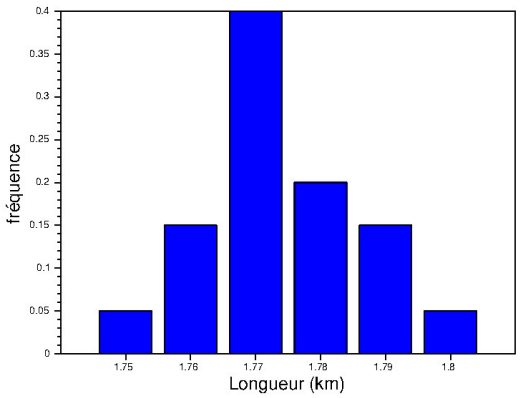



Figure 3 – Variabilité des résultats

- On retrouve une allure « en cloche » dans les deux exemples
- Moins on a réalisé d'expériences, moins on a d'information. Augmenter le nombre d'expériences augmente la qualité de l'exploitation que l'on peut faire de ces résultats expérimentaux.

## 1.2 Caractérisation de la répétabilité des mesures

La **répétabilité** associée au résultat d'un mesurage caractérise la dispersion des différents résultats autour d'une valeur moyenne lorsqu'on effectue plusieurs fois la même mesure dans les mêmes conditions.

Généralement, lorsqu'on dispose d'un très grand nombre d'expériences, on constate que l'histogramme qui représente la dispersion des résultats du mesurage suit une loi gaussienne.

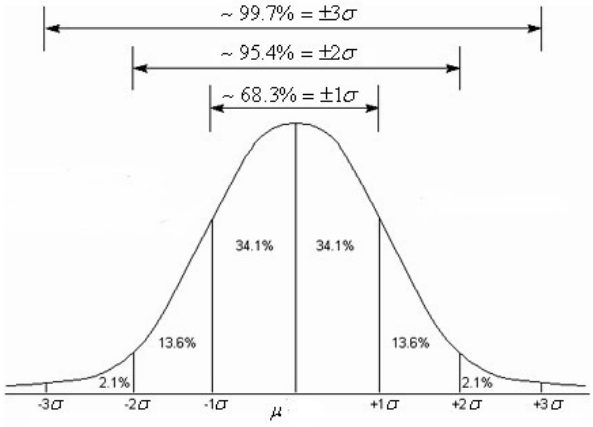



Figure 4 – Moyenne et écart-type pour une gaussienne

Une gaussienne peut être caractérisée par son espérance ($\mu$) et son écart type ($\sigma$).
Pour calculer $\mu$ et $\sigma$ d'une gaussienne, il faut connaître tous les points de cette courbe, c'est à dire disposer d'une infinité de mesures. Or, on ne dispose que rarement d'un nombre suffisant de mesures pour calculer exactement ces deux grandeurs. On va donc les estimer au mieux à l'aide des résultats expérimentaux dont on dispose.
On réalise $N$ fois le mesurage d'une grandeur $X$ dans des conditions identiques. Les résultats expérimentaux sont $\{x_1, x_2 \dots x_i, \dots x_N\}$

- Le meilleur estimateur de l'espérance $\mu$ de la gaussienne modélisant la dispersion de ces résultats, est la moyenne arithmétique $\bar{x}$ des résultats expérimentaux :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

- Le meilleur estimateur de l'écart-type $\sigma$ de la gaussienne modélisant la dispersion de ces résultats, est l'écart-type expérimental $s_X$ :

$$s_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

## 1.3 Estimation de l'incertitude du résultat

Du fait de la variabilité des résultats expérimentaux, le résultat final attribué à ce mesurage devra donc comporter deux valeurs numériques :

— Le meilleur estimateur de la grandeur mesurée,

— L'incertitude sur le meilleur estimateur associée à un niveau de confiance.

**Définition :** L'incertitude-type $u_X$ correspond à l'écart-type du meilleur estimateur.

**Propriété :** Lorsqu'on réalise une étude statistique, le meilleur estimateur de la grandeur $X$ est $\bar{x}$. On peut alors montrer que le meilleur estimateur $\hat{u}_X$ de $u_X$ est l'écart-type expérimental de la moyenne qui s'exprime :

$$\hat{u}_X = \frac{s_X}{\sqrt{N}}$$

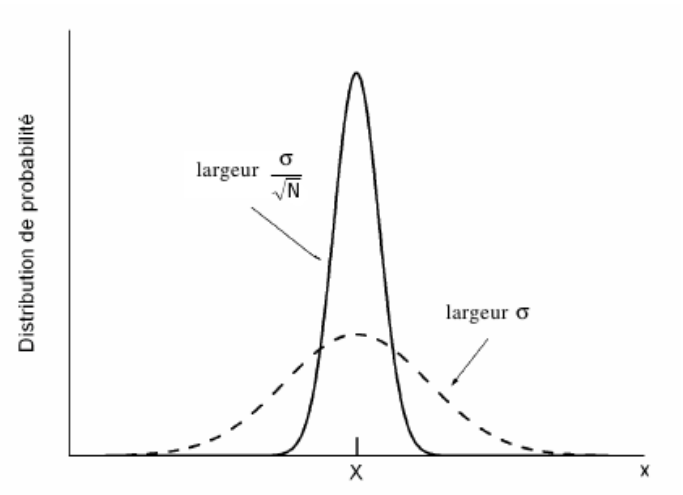



Figure 5 – Distribution de probabilité de la moyenne (pour une infinité de mesures)

## 1.4 Construction d'un intervalle de confiance

Comme on le voit sur la figure 4, pour une distribution gaussienne de valeurs, si on réalise à nouveau une série de $N$ expériences pour laquelle on calcule la moyenne, on a une probabilité d'environ 68% d'obtenir une valeur comprise entre $\bar{x} - u_X$ et $\bar{x} - u_X$. Deux problèmes se posent alors :

— 68% ne correspond pas à un seuil très parlant. On préfère indiquer dans le résultat final, un niveau de confiance plus élevé (généralement 95%)

— Comme on ne dispose pas d'une infinité d'expériences, on ne connait pas exactement l'espérance $\mu$ et $\sigma$. On ne dispose que des meilleurs estimateurs $\bar{x}$ et $s_X$ qui suivent une loi de Student.

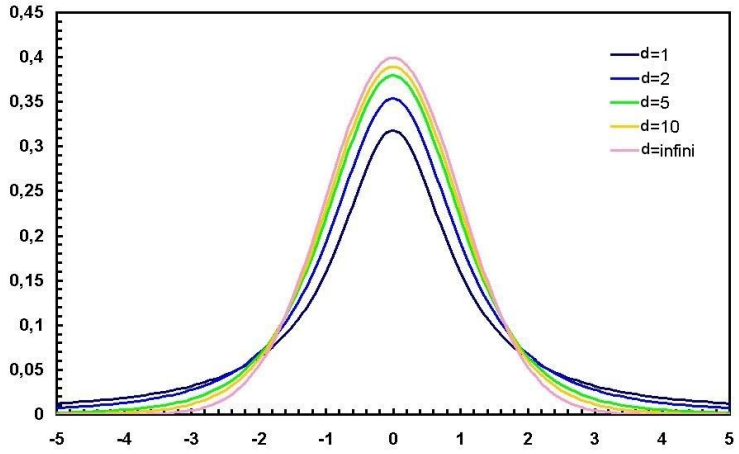



Figure 6 – Loi de distribution de student pour différents degrés de liberté (d=N-1)

| N | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P=95% | 4,3 | 3,82 | 2,78 | 2,57 | 2,45 | 2,37 | 2,31 | 2,26 | 2,20 | 2,16 | 2,13 | 2,09 |
| P=99% | 9,93 | 5,84 | 4,60 | 4,03 | 3,71 | 3,50 | 3,36 | 3,25 | 3,11 | 3,01 | 2,95 | 2,86 |

Figure 7 – Coefficient d'élargissement de student $t_N^{95\%}$ en fonction du nombre $N$ de mesures réalisées

**Incertitude élargie à 95% :** C'est l'incertitude que l'on fait figurer dans le résultat final

$$U_X = t_N^{95\%} u_X \qquad \text{soit} \qquad U_X = t_N^{95\%} \frac{s_X}{\sqrt{N}}$$

**Intervalle de confiance à 95% :** Intervalle compris entre $\bar{x} - U_X$ et $\bar{x} + U_X$

**Écriture du résultat** Un résultat final d'expérience se met sous la forme

$$X = \bar{x} \pm U_X \qquad (IC95\%)$$

— L'incertitude s'écrit avec 1 chiffre significatif (sauf en cas de mesurage professionnel sur des échantillons de plus de 50 expériences).

— $\bar{x}$ et $U_X$ ont la même précision.

## 1.5 La quantité ne remplace pas la qualité

► Justesse et fidélité d'un protocole expérimental :

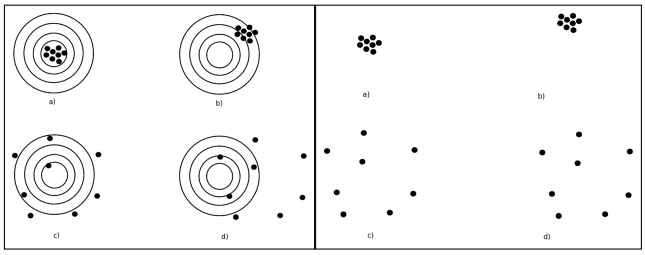


Figure 8 – Justesse et fidélité d'un mesurage par rapport à la valeur vraie d'une grandeur

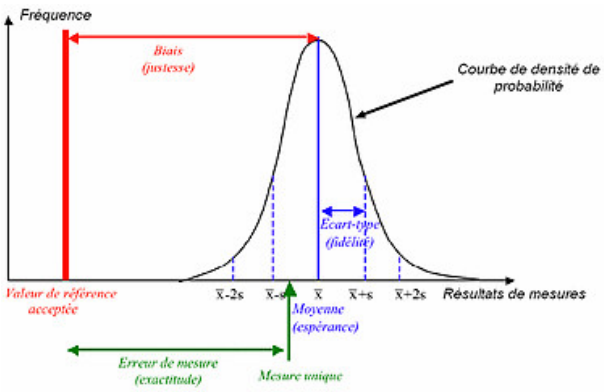
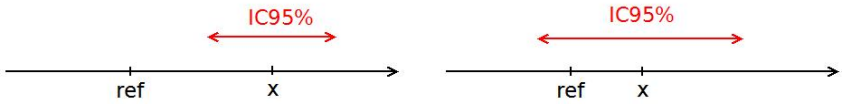



Figure 9 – Erreur systématique

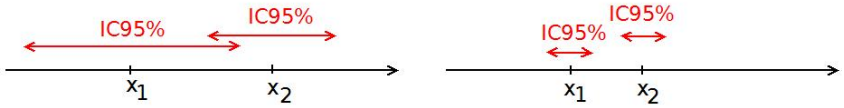
— L'analyse des résultats expérimentaux issus d'une série d'expériences ne permet pas de détecter les biais (ou erreurs systématiques) qui surviennent lorsque l'expérimentateur utilise du matériel mal étalonné, contrôle mal un paramètre expérimental (**grandeur d'influence**) ou encore commet une erreur dans le protocole expérimental.

— Il ne suffit donc pas de réaliser plusieurs fois une expérience pour être assuré de sa pertinence. Il faut s'assurer que le protocole ne comporte pas d'erreur systématique (ou bien que ces erreurs sont suffisamment faibles pour être négligeables devant les erreurs aléatoires)

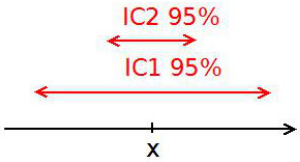
- Rigueur dans la conclusion :
  — Le résultat expérimental est-il compatible avec une valeur de référence ? (seuil de tolérance, valeur tabulée...)




— Deux résultats sont-ils compatibles entre-eux ?




— Une méthode est-elle plus précise qu'une autre ?




- Même si la conclusion porte sur l'analyse de l'incertitude élargie, la grandeur qui permet, à l'origine de construire un intervalle de confiance est l'incertitude-type. L'exploitation des résultats doit donc explicitement faire apparaître cette grandeur.

### 1.6 Application : Mesure de la période d'un pendule

- TPM1 questions 1 à 5 : Utilisation de Libre Office

## 2 Lorsqu'on ne peut pas constater la variabilité d'une mesure

### 2.1 Déterminer une incertitude-type sans étude statistique

Il arrive que faute de temps ou d'une précision suffisante du matériel on ne puisse pas réaliser l'étude d'une série d'expériences répétées. Comment procéder dans ce cas pour obtenir la valeur de l'incertitude associé au résultat du mesurage ?

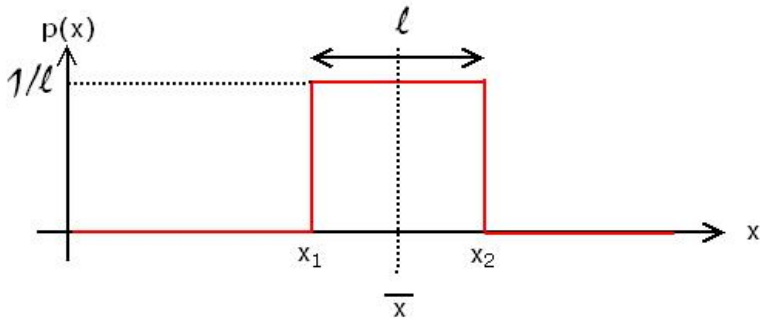



Figure 10 – Distribution de probabilité rectangulaire

L'écart-type de la distribution choisie définit l'incertitude-type. On montre alors que

$$u_X = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

Il est éventuellement possible de construire un intervalle de confiance avec cette grandeur. Conventionnellement on choisit un coefficient d'élargissement de 2 : $U_X = 2u_X$. On associe alors (un peu abusivement) un niveau de confiance de 95% à l'intervalle de confiance qui en découle.

### 2.2 Application : Longueur d'un pendule

- TPM1 question 6

## 3 Lorsque la grandeur cherchée n'est pas directement la grandeur mesurée

### 3.1 Propagation d'incertitudes

Il n'est pas toujours facile d'estimer l'incertitude sur une grandeur quand elle découle d'un calcul et n'est pas directement mesurée. De manière générale, si $X$ est une grandeur qui se calcule à partir de grandeurs mesurées $X_1, \dots X_i \dots X_N$ par une relation $X = f(X_1, \dots X_i \dots X_N)$ on a alors la relation suivante (appelée relation de propagation d'incertitudes)

$$u_X = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2_{\hat{X}_i} u^2_{X_i}}$$

Très souvent la relation entre les différentes grandeurs est assez simple et la relation de propagation d'incertitudes se simplifie alors :

$$\begin{array}{cc}
X = aX_1 & u_X = au_{X_1} \\
X = X_1 + X_2 & u_X = \sqrt{u^2_{X_1} + u^2_{X_2}} \\
X = X_1 - X_2 & u_X = \sqrt{u^2_{X_1} + u^2_{X_2}} \\
X = a_1X_1 + a_2X_2 & u_X = \sqrt{a_1^2u^2_{X_1} + a_2^2u^2_{X_2}} \\
X = X_1X_2 & \frac{u_X}{\hat{X}} = \sqrt{\left(\frac{u_{X_1}}{\hat{X}_1}\right)^2 + \left(\frac{u_{X_2}}{\hat{X}_2}\right)^2} \\
X = \frac{X_1}{X_2} & \frac{u_X}{\hat{X}} = \sqrt{\left(\frac{u_{X_1}}{\hat{X}_1}\right)^2 + \left(\frac{u_{X_2}}{\hat{X}_2}\right)^2}
\end{array}$$

Le Logiciel GUM_ MC permet d'effectuer automatiquement tous les calculs de propagation d'incertitudes.

### 3.2 Application : Détermination d'un intervalle de confiance pour la période d'oscillation d'un pendule simple

- TPM1 question 7 : Utilisation du logiciel GUM_ MC

# 4 Utilisation d'une modélisation graphique : Régression linéaire par méthode des moindres carrés

## 4.1 Principe la méthode

— On réalise le mesurage d'un ensemble de couples de valeurs $\{x_i, y_i\}$ de deux grandeurs $X$ et $Y$. On place alors sur un graphique l'ensemble des points expérimentaux de coordonnées $\{x_i, y_i\}$ obtenus.

— La méthode des moindres carrés, aussi appelée « régression linéaire » consiste à déterminer la droite qui s'approchera « au mieux » de l'ensemble des différents résultats du mesurage. Il s'agit donc d'associer une loi affine (ou linéaire) à l'évolution de $Y$ en fonction de $X$. Il faut alors déterminer, par le calcul, les paramètres (pente et ordonnée à l'origine) de la droite de régression linéaire.

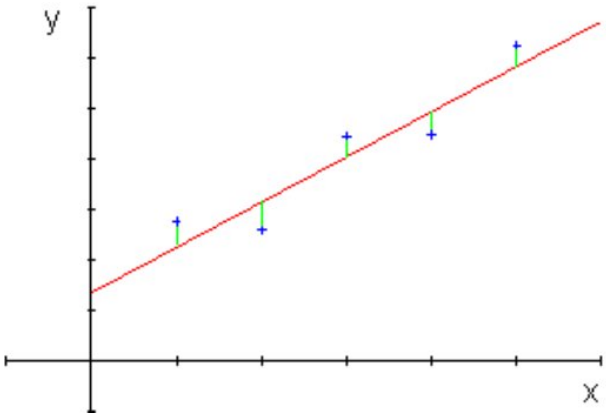



Figure 11 – Droite de régression linéaire

La méthode des moindres carrés consiste donc à chercher l'équation de la droite $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$ parmi tous les $ax + b$ possibles, qui minimise la grandeur $C = \sum_i^N (y_i - \hat{y}_i)^2$.

— De nombreux logiciels permettent de calculer les coefficients de la droite de régression linéaire. Certains permettent aussi d'accéder aux incertitudes-types liées à ces coefficients.

— Chaque expérience réalisée, permet de placer sur le graphe un point de coordonnées $(x_i, y_i)$. L'ensemble de ces points est supposé normalement distribué par rapport à la droite de régression linéaire. Pour chaque point, la distance à la droite $r_i = y_i - \hat{y}_i$ (appelée « le résidu ») traduit l'erreur que commise lors de chaque mesure.

— Pour valider la pertinence d'une modélisation linéaire (ou affine), on peut vérifier qualitativement que les résidus prennent bien des valeurs aléatoires.

— L'utilisation du coefficient de corrélation pour analyser une régression linéaire n'est pas pertinente :

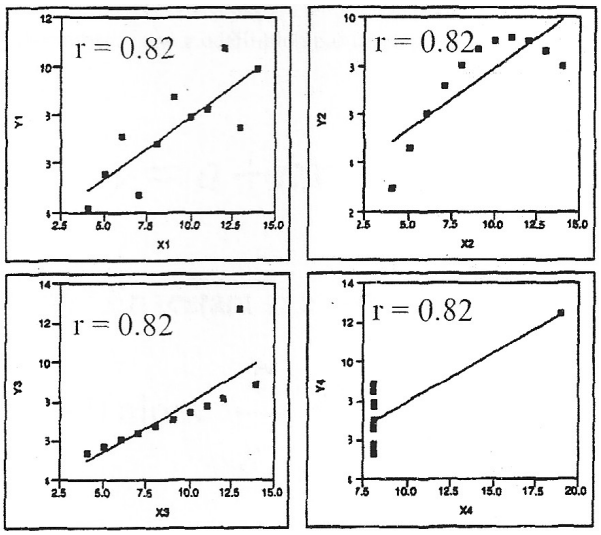



Figure 12 – Inefficacité du coefficient de corrélation pour valider un modèle

### 4.2 Application : Détermination de l'intensité de la pesanteur à l'aide d'un pendule simple

- TPM1 question 8 et 9 : Utilisation des logiciels Libre Office (Fonction DROITEREG) ou Python.

## Compétences exigibles

— Utiliser le vocabulaire de base de la métrologie : mesurage, valeur vraie, grandeur d'influence, erreur aléatoire, erreur systématique.

— Identifier les sources d'erreurs lors d'une mesure.

— Savoir que l'incertitude est un paramètre associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui peuvent être raisonnablement attribuées à la grandeur mesurée.

— Procéder à l'évaluation de type A de l'incertitude-type (incertitude de répétabilité).

— Procéder à l'évaluation de type B de l'incertitude-type dans des cas simples (instruments gradués) ou à l'aide de données fournies par le constructeur (résistance, multimètre, oscilloscope, thermomètre, verrerie...).

— Évaluer l'incertitude-type d'une mesure obtenue à l'issue de la mise en œuvre d'un protocole présentant plusieurs sources d'erreurs indépendantes dans les cas simples d'une expression de la valeur mesurée sous la forme d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient ou bien à l'aide d'une formule fournie ou d'un logiciel.

— Comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreurs.

— Associer un niveau de confiance de 95 % à une incertitude élargie.

— Exprimer le résultat d'une mesure par une valeur et une incertitude associée à un niveau de confiance.

— Commenter qualitativement le résultat d'une mesure en le comparant, par exemple, à une valeur de référence.

— Analyser les sources d'erreurs et proposer des améliorations du processus de mesure.

— Utiliser un logiciel de régression linéaire.

— Expliquer en quoi le coefficient de corrélation n'est pas un outil adapté pour juger de la validité d'un modèle linéaire.

— Juger qualitativement si des données expérimentales avec incertitudes sont en accord avec un modèle linéaire.

— Extraire à l'aide d'un logiciel les incertitudes sur la pente et sur l'ordonnée à l'origine dans le cas de données en accord avec un modèle linéaire.