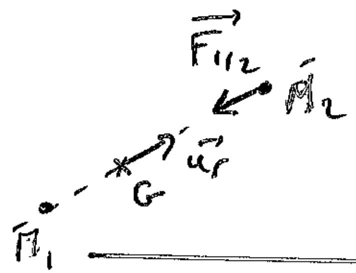
Les ondes gravitationnelles et leur détection
(D'après ENS _ PSI 2017)

① 

$$\boxed{\vec F_{1/2} = -G_N \frac{m_1 m_2}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2}\vec u_r}$$

② $$\boxed{\vec v_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{m_1\vec v_1 + m_2\vec v_2}{m_1+m_2}}$$

③ $$\boxed{\vec L_G = \overrightarrow{GM_1}\wedge m_1\vec v_1 + \overrightarrow{GM_2}\wedge m_2\vec v_2}$$

$$\frac{d\vec L_G}{dt} = \overrightarrow{GM_1}\wedge\vec F_{2/1} + \overrightarrow{GM_2}\wedge\vec F_{1/2}$$

$$= (\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{M_2G})\wedge\vec F_{2/1} = \overrightarrow{M_2M_1}\wedge\vec F_{2/1}$$

Or $\vec F_{2/1} \parallel \overrightarrow{M_2M_1}$ donc $\frac{d\vec L_O}{dt} = \vec 0 \Rightarrow \underline{\vec L_O = \vec{cte}}$

le mouvement des 2 trous noirs est <u>plan</u>

④ PFD dans R sur M_1 puis M_2

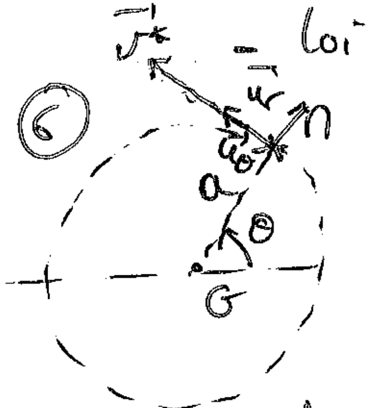
$$m_1\ddot{\overrightarrow{OM_1}} = \vec F_{2/1} \quad \text{et} \quad m_2\ddot{\overrightarrow{OM_2}} = \vec F_{1/2}$$
$$= -\vec F_{1/2}$$

$$\mu\ddot{\vec r} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\ddot{\overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\ddot{\overrightarrow{M_1O}} + \ddot{\overrightarrow{OM_2}}\right)$$

$$\mu\ddot{\vec r} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{\vec F_{1/2}}{m_2} + \frac{\vec F_{1/2}}{m_1}\right)$$

$$\boxed{\mu\ddot{\vec r} = \vec F_{1/2}}$$

⑤ Champ de force centrale conservative :
- E_m = cte (conservative suffit)
- Mouvement plan
- loi des Aires. ($r^2\dot\theta = C$)

⑥ 

$$\boxed{\begin{aligned}\vec r &= \overrightarrow{GM} = a\vec u_r\\ \vec v^* &= a\dot\theta\vec u_\theta\\ \vec a^* &= a\ddot\theta\vec u_\theta - a\dot\theta^2\vec u_r\end{aligned}}$$

<u>Rq</u>: $\dot\theta$ n'est pas un paramètre du problème,

<u>PFD</u> sur le mobile fictif dans R*

$\mu\frac{d\vec v^*}{dt} = \vec F_{1/2}$. Le mouvement est circulaire et uniforme donc

$$-\mu a \dot{\theta}^2 \vec{u_r} = \vec{F_{1/2}} = -G_N \frac{m_1 m_2}{a^2}\vec{u_r}$$

$$\dot{\theta}^2 = G_N \frac{m_1+m_2}{a^3}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r} &= a\vec{u_r}\\ \vec{v}^* &= \sqrt{\frac{G_N(m_1+m_2)}{a}}\,\vec{u_\theta}\\ \vec{a}^* &= -G_N\frac{m_1+m_2}{a^2}\vec{u_r}\end{aligned}}$$

7 On a déjà répondu à la question précédente : $\|\vec{v}^*\| = \sqrt{\frac{G_N(m_1+m_2)}{a}}$

Rq : " donner sa valeur " texte maladroit car il n'y a aucune valeur numérique disponible. " Donner son expression " serait + juste.

$$v = \frac{2\pi a}{T} \Leftrightarrow T = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{G_N(m_1+m_2)}}$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G_N(m_1+m_2)}}$$ 3e loi de Kepler

8 $$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{OM_1} + m_2\vec{OM_2}}{m_1+m_2}$$

$$\vec{GM_1} = \vec{GO} + \vec{OM_1} = -\frac{m_1\vec{OM_1} + m_2\vec{OM_2}}{m_1+m_2} + \vec{OM_1}$$

$$\vec{GM_1} = \left(-\frac{m_1}{m_1+m_2} + 1\right)\vec{OM_1} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{OM_2}$$

Or $\vec{r} = \vec{M_1M_2} = a\vec{u_r} = \vec{M_1O} + \vec{OM_2}$

Donc $\vec{OM_2} = a\vec{u_r} + \vec{OM_1}$

$$\vec{GM_1} = \frac{m_1+m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{OM_1} - \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{OM_1} + a\vec{u_r})$$

$$\boxed{\vec{GM_1} = -a\frac{\mu}{m_1}\vec{u_r}}$$

$$\vec{GM_2} = \vec{GO} + \vec{OM_2} = -\frac{m_1\vec{OM_1} + m_2\vec{OM_2}}{m_1+m_2} + a\vec{u_r} + \vec{OM_1}$$

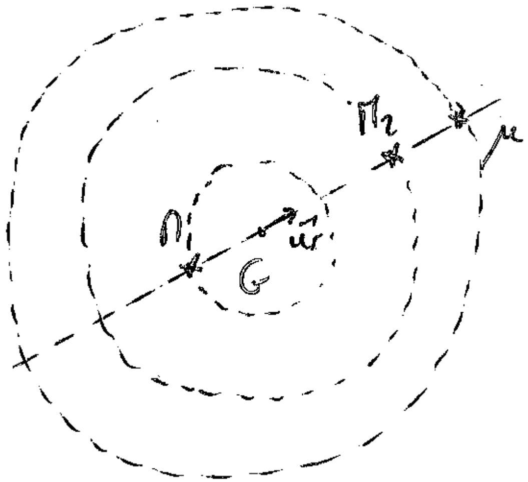
$$\vec{GM_2} = \left(\frac{-m_1}{m_1+m_2} + 1\right)\vec{OM_1} - \frac{m_2}{m_1+m_2}(a\vec{u_r} + \vec{OM_1}) + a\vec{u_r}$$

2

$$\overrightarrow{GM_2} = \underbrace{\frac{-m_1 + m_1 + m_2 - m_2}{m_1+m_2}}_{0} + \left(\frac{-m_2}{m_1+m_2} + 1\right) a\,\vec{u_r}$$

$$\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2} a\,\vec{u_r} = \boxed{\frac{a\mu}{m_2}\vec{u_r} = \overrightarrow{GM_2}}$$

Donc les points M_1 et M_2 suivent des orbites circulaires de rayon $\frac{a\mu}{m_1} = a_1$ et $a_2 = \frac{a\mu}{m_2}$



⑨ $[I] = [m x^2] = ML^2$ homogène à un moment d'inertie.

Rq : A nouveau il faut comprendre "exprimer" au lieu de "calculer".

$$I_{11} = m_1 a_1^2 \cos^2 \Omega t + m_2 a_2^2 \cos^2 \Omega t$$

$$I_{11} = (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) \cos^2 \Omega t$$

$$I_{11} = \left(\frac{m_1 a^2 \mu^2}{m_1^2} + \frac{m_2 a^2 \mu^2}{m_2^2}\right) \cos^2 \Omega t$$

$$I_{11} = a^2\mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \cos^2 \Omega t$$

$$\boxed{I_{11} = a^2 \mu \cos^2 \Omega t}$$

$$I_{22} = m_1 a_1^2 \sin^2 \Omega t + m_2 a_2^2 \sin^2 \Omega t$$

$$\boxed{I_{22} = a^2 \mu \sin^2 \Omega t}$$

$$I_{12} = m_1 a_1^2 \sin \Omega t \cos \Omega t + m_2 a_2^2 \sin \Omega t \cos \Omega t$$

$$\boxed{I_{12} = a^2 \mu \sin \Omega t \cos \Omega t}$$

⑩ $$h_{11} = \frac{2G_N}{Rc^4} \frac{d^2}{dt^2}\left[a^2 \mu \cos^2\left(\left(t - \frac{R}{c}\right)\Omega\right)\right]$$

$$h_{11} = -\frac{2G_N a^2 \mu \Omega}{Rc^4} \frac{d}{dt}\left[\underbrace{2\cos\left(\Omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right) \sin\left(\Omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right)}_{\sin\left(2\Omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right)}\right]$$

$$\boxed{h_{11} = -\frac{4G_N a^2 \mu \Omega^2}{Rc^4} \cos\left(2\Omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right)}$$

$$h_{22} = \frac{2G_N}{Rc^4}\frac{d^2}{dt^2}\left[a^2\mu\sin^2\left(\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)\right]$$

$$h_{22} = \frac{2G_N a^2\mu}{Rc^4}\frac{d}{dt}\left(2\Omega\,\underbrace{\sin\left(\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)\cos\left(\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)}_{\frac{1}{2}\sin\left(2\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)}\right)$$

$$\boxed{h_{22} = -h_{11}}$$

$$h_{12} = \frac{2G_N}{Rc^4}\frac{d^2}{dt^2}\left[a^2\mu\sin\left(\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)\cos\left(\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)\right]$$

$$h_{12} = \frac{G_N}{Rc^4}a^2\mu\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\sin\left(2\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)\right)\right]$$

$$h_{12} = \frac{G_N a^2\mu}{Rc^4}\frac{d}{dt}\left[+2\Omega\cos\left(2\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)\right]$$

$$\boxed{h_{12} = -\frac{4\Omega^2 G_N a^2\mu}{Rc^4}\sin\left(2\Omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right) = h_{21}}$$

OPPH avec $\boxed{f_{OG} = \frac{\Omega}{\pi}}$

(11) $f_{OG} = \frac{2}{T} = \frac{1}{\pi a}\sqrt{\frac{G_N(m_1+m_2)}{a}}$

$$f_{OG} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{G_N \times 60 M_\odot}{\left[4\times\left(\frac{2G_N\times 60M_\odot}{c^2}\right)\right]^3}}$$

$$f_{OG} = \frac{1}{\pi}\times\left(\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\times 60\times 2\cdot10^{30}}{\left(4\times\frac{2\times 6{,}6\cdot10^{-11}\times 60\times 2\cdot10^{30}}{(3\cdot10^8)^2}\right)^3}\right)^{1/2}$$

$f_{OG} = 47{,}5\ \mathrm{Hz} \sim 50\ \mathrm{Hz}$.

$$\frac{\|\vec{v}^*\|}{c} = \frac{1}{\cancel{c}}\sqrt{\frac{\cancel{G_N\times 60M_\odot}}{4\times\frac{2\cancel{G_N\times 60M_\odot}}{\cancel{c^2}}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\frac{\|\vec{v}^*\|}{c} = 0{,}35}$$

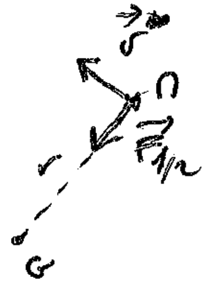
Soit h_0 l'amplitude de l'onde gravitationnelle, $h_0 = \frac{4G_N\mu a^2\Omega^2}{Rc^4} = \frac{4G_N(4R_s)^2\pi^2 f_{OG}^2\mu}{Rc^4}$

$$h_0 = \frac{64\,G_N\times 4G_N^2 60^2 M_\odot^2\times 30^2 M_\odot^2\pi^2\times f_{OG}^2}{Rc^8\times 60\cdot M_\odot}$$

$$h_0 = \frac{64\times G_N^3\times 4\times 60\times 30^2\times M_\odot^3\times\pi^2\times 47{,}5^2}{Rc^8}$$

$$h_0 = \frac{64\times(6,67.10^{-11})^3\times 4\times 60\times 30^2\times(2.10^{30})^3}{400.10^6\times 3,1.10^{16}\times(3.10^8)^8}$$

$$\boxed{h_0 = 9.10^{-22} \sim 10^{-21}}$$



(12) $E^* = E_c^*(M) + E_p(M)$

$E_c^* = \frac{1}{2}\mu v^{*2} = \frac{1}{2}\mu a^2\Omega^2$

$\vec{F}_{1/2} = -\frac{G_N m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r = -\vec{\mathrm{grad}}(E_p)$

$\frac{dE_p}{dr} = -\frac{G_N \mu M_{tot}}{r}$ or $r = a$

Donc $E^* = \frac{1}{2}\mu a^2\Omega^2 - \frac{G_N\mu M_{tot}}{a}$

$a^3\Omega^2 = G_N M_{tot} \Rightarrow \boxed{E^* = -\frac{1}{2}\frac{G_N\mu M_{tot}}{a}}$

(13) Si a dépend du tps,

$\frac{dE^*}{dt} = -\frac{G_N\mu M_{tot}}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\right) = +\frac{G_N\mu M_{tot}}{2a^2}\frac{da}{dt}$

$\frac{dE^*}{dt} = -\frac{E^*}{a}\frac{da}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{E^*}\frac{dE^*}{dt} = -\frac{1}{a}\frac{da}{dt}}$

On a de plus : $a^3 = G_N M_{tot}\frac{1}{\Omega^2}$

$\frac{da}{dt} = (G_N M_{tot})^{1/3}\frac{d}{dt}\Omega^{-2/3}$

$\frac{da}{dt} = (G_N M_{tot})^{1/3}\left(-\frac{2}{3}\right)\Omega^{-5/3}\frac{d\Omega}{dt}$

$\frac{da}{dt} = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{G_N M_{tot}}{\Omega^2}\right)^{1/3}\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dt}$

$$\boxed{\frac{da}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dt}}$$

$\frac{dE^*}{dt} < 0$ et $E^* < 0$ donc $\frac{dE^*}{E^* dt} > 0$

$\hookrightarrow \frac{da}{dt} < 0$ et $\frac{d\Omega}{dt} > 0$

Les 2 trous noirs se rapprochent l'un de l'autre en tournant avec une vitesse de rotation de plus en plus grande.

(14) $Q = I - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(I)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}(I) = I_{11} + I_{22} = a^2\mu(\cos^2\Omega t + \sin^2\Omega t)$

$Q_{11} = a^2\mu\cos^2\Omega t - \frac{1}{2}\mu a^2$

$$\boxed{Q_{11} = \mu a^2 \left(\cos^2 \Omega t - \frac{1}{2} \right)}$$

$$\boxed{Q_{22} = \mu a^2 \left(\sin^2 \Omega t - \frac{1}{2} \right)}$$

$$\boxed{Q_{12} = \mu a^2 \sin \Omega t \cos \Omega t = Q_{21}}$$

$$\frac{dQ_{11}}{dt} = \mu a^2 \frac{d}{dt} \cos^2 \Omega t = 2 \mu a^2 \Omega \cos(\Omega t) \sin \Omega t$$

$$= \mu a^2 \Omega \sin(2 \Omega t)$$

$$\frac{d^2 Q_{11}}{dt^2} = 2 \mu a^2 \Omega^2 \cos(2 \Omega t)$$

$$\frac{d^3 Q_{11}}{dt^3} = -4 \Omega^3 \mu a^2 \sin(2 \Omega t)$$

$$\left\langle \left(\frac{d^3 Q_{11}}{dt^3} \right)^2 \right\rangle = 8 \Omega^6 \mu^2 a^4$$

$$\frac{dQ_{22}}{dt} = \mu a^2 \frac{d}{dt} \left(\sin^2 \Omega t \right) = 2 \mu a^2 \Omega \sin(\Omega t \cos \Omega t)$$

$$= \mu a^2 \Omega \sin(2 \Omega t)$$

$$\hookrightarrow \left\langle \left(\frac{d^3 Q_{22}}{dt^3} \right)^2 \right\rangle = 8 \Omega^6 \mu^2 a^4$$

$$\frac{dQ_{12}}{dt} = \mu a^2 \frac{d}{dt} \left(\sin \Omega t \cos \Omega t \right) = \frac{\mu a^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\sin 2 \Omega t \right)$$

$$= \mu a^2 \Omega \cos(2 \Omega t)$$

$$\frac{d^2 Q_{12}}{dt^2} = -2 \mu a^2 \Omega^2 \sin(2 \Omega t)$$

$$\frac{d^3 Q_{12}}{dt^3} = -4 \Omega^3 \mu a^2 \cos(2 \Omega t) = \frac{d^3 Q_{21}}{dt^3}$$

$$\left\langle \left(\frac{d^3 Q_{12}}{dt^3} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{d^3 Q_{21}}{dt^3} \right)^2 \right\rangle = 8 \Omega^6 \mu^2 a^4$$

$$\mathcal{P} = 4 \times \frac{G_N}{5c^5} \times 8 \Omega^6 \mu^2 a^4 = \frac{32}{5c^5} G_N \Omega^6 \mu^2 a^4 = \mathcal{P}$$

$$\text{Or } \Omega^6 = \frac{G_N^3 M_{tot}^3}{a^9} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P} = \frac{32}{5} \frac{G_N^4 \mu^2 M_{tot}^3}{c^5 a^5}}$$

15 TEM : $\frac{dE^*}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) = -\frac{32}{5} \frac{G_N^4 \mu^2 M_{tot}^3}{c^5 a^5(t)}$

On rappelle que $E^* = -\frac{G_N \mu M_{tot}}{2a}$

$$\frac{dE^*}{dt} = -\frac{G_N \mu M_{tot}}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{G_N \mu M_{tot}}{2a^2} \frac{da}{dt}$$

$$\frac{G_N \mu M_{tot}}{2a^2}\frac{da}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{G_N^4 \mu^2 M_{tot}^3}{c^5 a^5}$$

$$\boxed{\frac{da}{dt} = -\frac{64 G_N^3 \mu M_{tot}^2}{5c^5 a^3}}$$

$$\int_{a_0}^{a} a^3\, da = -\frac{64 G_N^3 \mu M_{tot}^3}{5c^5}\int_0^t dt$$

$$\frac{a^4 - a_0^4}{4} = -\frac{64 G_N^3 \mu M_{tot}^3 t}{5c^5}$$

$$\boxed{a = \left(a_0^4 - \frac{256 G_N^3 \mu M_{tot} t}{5c^5}\right)^{1/4}}$$

- $a(t)$ est bien une fonction décroissante du temps.
- Au delà d'une certaine date, la distance a n'est plus définie. (signification ? limite des considérations newtoniennes ?) ↳ collision.

$h_0 \propto a^2$ donc si $a \searrow$ alors $h_0 \nearrow$

(16) $$f_{OG} = \frac{\Omega}{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{G_N M_{tot}}{a^3}\right)^{1/2}$$

$$\frac{df_{OG}}{dt} = \frac{1}{\pi}(G_N M_{tot})^{1/2}\frac{d}{dt}a^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{\pi}(G_N M_{tot})^{1/2}\left(-\frac{3}{2}\right)a^{-5/2}\frac{da}{dt}$$

$$\frac{df_{OG}}{dt} = \frac{3}{2\pi}(G_N M_{tot})^{1/2} \times \frac{64 G_N^3 \mu M_{tot}^2}{5c^5 a^3}\, a^{-5/2}$$

Or $f_{OG}^2 \pi^2 = \frac{G_N M_{tot}}{a^3} \Leftrightarrow a = \left(\frac{G_N M_{tot}}{\pi^2 f_{OG}^2}\right)^{1/3}$

Donc $$\frac{df_{OG}}{dt} = \frac{96}{5c^5\pi}\mu M_{tot}^{5/2} G_N^{7/2} a^{-11/2}$$

$$\frac{df_{OG}}{dt} = \frac{96}{\pi 5c^5}\mu M_{tot}^{5/2} G_N^{7/2}\left(\frac{G_N M_{tot}}{\pi^2 f_{OG}^2}\right)^{-11/6}$$

$$\boxed{\frac{df_{OG}}{dt} = \frac{96}{5c^5}\mu M_{tot}^{2/3} G_N^{5/3} \pi^{8/3} f_{OG}^{11/3}}$$

Rq : le texte demande de tracer l'allure de la "fonction $h(t)$" mais $h(t)$ est une matrice

↳ pb de rotation.

On comprend que cela fait référence à

l'amplitude des oscillations

$$h_0(t) = \frac{4 G_N \mu a^2(t) \Omega^2(t)}{R c^4} \quad (Q11)$$

$$h_0(t) = K a^2(t) f_{OG}^2(t)$$

D'après l'équation différentielle précédente

$$\frac{df_{OG}}{dt} = \alpha f_{OG}^{11/3} \Rightarrow \int_{f_{OG_0}}^{f_{OG}} \frac{df_{OG}}{f_{OG}^{11/3}} = \int_0^t \alpha \, dt$$

avec $\alpha = \frac{96}{5c^5} \mu M_{tot}^{2/3} G_N^{5/3} \pi^{8/3}$

$$-\frac{8}{3}\left(f_{OG}^{-8/3} - f_{OG_0}^{-8/3}\right) = \alpha t$$

$$f_{OG} = \left(-\frac{3\alpha}{8} t + f_{OG_0}^{-8/3}\right)^{-3/8}$$

Défini uniquement pour $f_{OG_0}^{-8/3} - \frac{3\alpha t}{8} > 0$

ie $t < \frac{8 f_{OG_0}^{-8/3}}{3\alpha}$

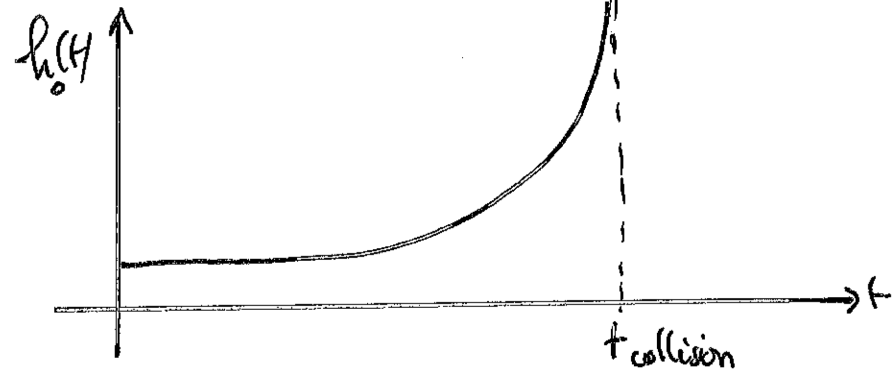
D'après Q15, $a = (a_0 - \beta t)^{1/4}$

avec $\beta = \frac{256 G_N^3 \mu M_{tot}}{5c^5}$

$a(t)$ défini tant que $a_0 - \beta t > 0$ ie $t < \frac{a_0}{\beta}$

Rq: ces 2 conditions doivent correspondre au même instant $a \to 0$; $f_{OG} \to +\infty$

$$h_0(t) = K (a_0 - \beta t)^{1/2} \left(f_{OG_0}^{-8/3} - \frac{3\alpha}{8} t\right)^{-3/4}$$



Peu avant la collision :

- limites de la mécanique newtoniennes (particules relativistes
- Déformation des structures
- Autres phénomènes de dissipation (Thermo)

(17) $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\begin{pmatrix} h_+(t-\frac{R}{c}) & h_\times(t-\frac{R}{c}) & 0\\ h_\times(t-\frac{R}{c}) & -h_+(t-\frac{R}{c}) & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} h_+(t-\frac{R}{c})x_0 + h_\times(t-\frac{R}{c})y_0 \\ h_\times(t-\frac{R}{c})x_0 - h_+(t-\frac{R}{c})y_0 \\ 0\end{pmatrix}$

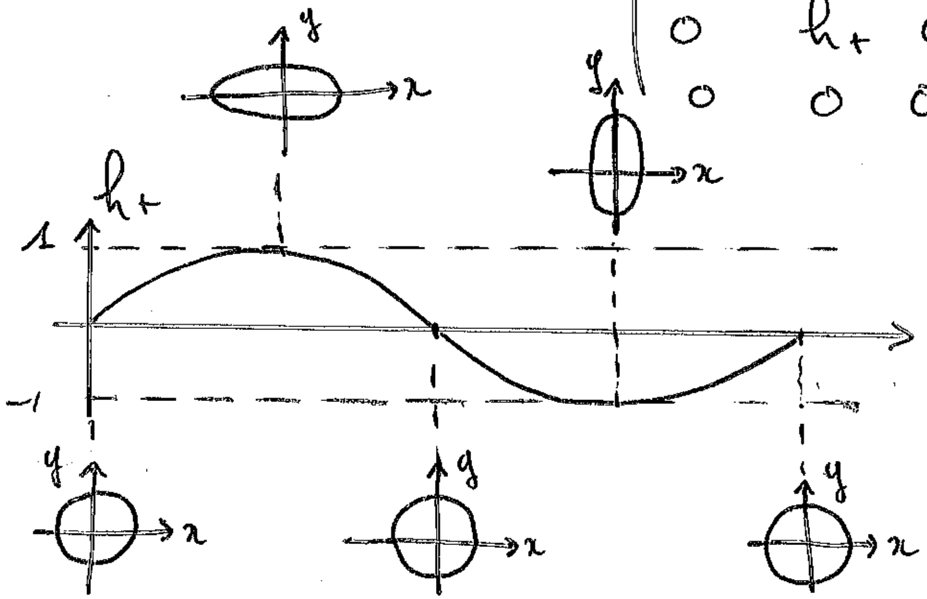
particules initialement au repos $\dot{\vec{\xi}}(t=0)=\vec{0}$ et $\vec{\xi}(t=0)=0$

Par double intégration $\vec{\xi}(t) = \frac{1}{2}h(t-\frac{R}{c})\vec{r_0} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}\delta x &= \frac{1}{2}h_+ x_0 + \frac{1}{2}h_\times y_0\\ \delta y &= \frac{1}{2}h_\times x_0 - \frac{1}{2}h_+ y_0\\ \delta z &= 0\end{aligned}}$

$\|\vec{\xi}(t)\| \sim h_0\|\vec{r_0}\| \Rightarrow \boxed{\frac{\|\vec{\xi}\|}{\|\vec{r_0}\|} \sim h_0 = 10^{-21} \ll 1}$

Les déplacements relatifs des particules sont imperceptibles dans la vie quotidienne.

(18) Si $h_\times = 0$ $h(t) = \begin{pmatrix} h_+ & 0 & 0\\ 0 & h_+ & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}\delta x = \frac{1}{2}h_+ x_0\\ \delta y = -\frac{1}{2}h_+ y_0\\ \delta z = 0\end{cases}$



Evolution en opposition de phase dans les directions x et y.

(19) $\tau = \frac{2l_0}{c}$ $T = \frac{1}{f_{OG}}$

On peut négliger le déplacement des miroirs si $\tau \ll T$ ie $\frac{2L_0}{c} \ll \frac{1}{f_{GO}} \Leftrightarrow L_0 \ll \frac{c}{2f_{GO}}$

$$L_0 \ll \frac{3.10^8}{2\times 50} = \underline{3.10^3\,\text{km}}$$

$$\delta\tau = \frac{\delta x}{c} = \frac{h_+ L_0}{c} < \frac{1.10^{-21}\times 3.10^6}{3.10^8}$$

$\delta\tau < 10^{-23}$ s trop faible pour être détecté aujourd'hui.

20. $$\boxed{d\tau_x = dx\left(1+\frac{h_+}{2}\right)\frac{n}{c}}$$

$$\tau_x = \int_0^{2L_1^0} \frac{n}{c}\left(1+\frac{h_+}{2}\right)dx$$

$$\boxed{\tau_x = \frac{2n}{c}\left(1+\frac{h_+}{2}\right)L_1^0}$$

21. $$d\tau_y = dy\left(1-\frac{h_+}{2}\right)\frac{n}{c}$$

$$\tau_y = \int_0^{2L_2^0} \frac{n}{c}\left(1-\frac{h_+}{2}\right)dy$$

$$\tau_y = \frac{2n}{c}\left(1-\frac{h_+}{2}\right)L_2^0$$

$$\tau_x - \tau_y = \frac{2n}{c}\left(1+\frac{h_+}{2}\right)L_1^0 - \frac{2n}{c}\left(1-\frac{h_+}{2}\right)L_2^0$$

$$\boxed{\tau_x - \tau_y = \frac{n h_+}{c}\left(L_2^0 + L_1^0\right) + \frac{2n}{c}\left(L_1^0 - L_2^0\right)}$$

↳ On peut tenter de détecter une onde gravitationnelle avec ....

⊗ Une flute ?

⊗ Une fourchette ?

✓ Un interféromètre de Michelson !

(41) $\vec{E_1} = r_s r_1 t_s \vec{E_0} e^{j(\omega t - nk(L_p + 2L_1 + L_d))}$

$\vec{E_2} = t_s r_2 r_s \vec{E_0} e^{j(\omega t - nk(L_p + 2L_2 + L_d))}$

$\Delta\phi = nk(L_p + 2L_2 + L_d - L_p - 2L_1 - L_d)$

$$\boxed{\Delta\phi = 2nk(L_1 - L_2)}$$

(42) • les 2 ondes se superposent constructivement pour $\Delta\phi = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. (les ondes sont en phase)

• les 2 ondes sont en opposition de phase pour $\Delta\phi = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ => Interférences destructives.

(43) $\vec{E}_{tot} = t_s r_s \vec{E_0}\left(e^{j(\omega t - nk(L_p + 2L_1 + L_d))} + e^{j(\omega t - nk(L_p + 2L_2 + L_d))}\right)$

$I = \langle \vec{E}_{tot} \cdot \vec{E}_{tot}^{*} \rangle = t_s^2 r_s^2 E_0^2 \left(e^{-jnk(L_p + 2L_1 + L_d)} + e^{-jnk(L_p + 2L_2 + L_d)}\right) \times \left(e^{+jnk(L_p + 2L_1 + L_d)} + e^{+jnk(L_p + 2L_2 + L_d)}\right)$

$I = t_s^2 r_s^2 E_0^2 \left(1 + e^{-j\Delta\phi} + 1 + e^{+j\Delta\phi}\right)$

$$\boxed{I = 2t_s^2 r_s^2 E_0^2 (1 + \cos\Delta\phi)}$$ (Relation de Fresnel)

$\cos\Delta\phi = \cos^2\frac{\Delta\phi}{2} - \sin^2\frac{\Delta\phi}{2} = \cos^2\frac{\Delta\phi}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

$\cos\Delta\phi = 2\cos^2\frac{\Delta\phi}{2} - 1$

D'où $$\boxed{I = \underbrace{4t_s^2 r_s^2 E_0^2}_{I_0} \cos^2\frac{\Delta\phi}{2}}$$

(44) $\frac{\Delta\phi}{2} = nk(L_1 - L_2) = nk(L_1^0 + \delta L_1 + L_2^0 + \delta L_2)$

$= nk(L_1^0 - L_2^0) + nk(\delta L_1 + \delta L_2)$

$= \frac{\phi_0}{2} + nk\delta x$

D'où $$\boxed{I = I_0 \cos^2\left(nk\delta x + \frac{\phi_0}{2}\right)}$$

(45) $I = I_0 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta x + \frac{\phi_0}{2}\right)$

$I = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi\delta x}{\lambda} + \phi_0\right)\right)$

$I = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi\delta x}{\lambda}\right)\cos\phi_0 - \sin\left(\frac{4\pi\delta x}{\lambda}\right) \times \sin\phi_0\right)$

$$I_{DL_1} = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\phi_0 - \frac{4\pi\delta x}{\lambda}\sin\phi_0\right)$$

$$\frac{\delta I}{\delta x} = -\frac{I_0}{2} \times \frac{4\pi}{\lambda}\sin\phi_0 = -I_0 \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}_{nk}\sin\phi_0$$

$$\boxed{\delta I = -I_0 nk\,\delta x \sin\phi_0}$$

δI est maximale pour $\underline{\phi_0 = \frac{\pi}{2}\ [\pi]}$

Au repos, l'interféromètre est réglé afin que les 2 ondes soient en <u>opposition de phase</u>.

46 $$\boxed{\Delta\phi = 2nk(L_1 - L_2) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\tau_x - \tau_y)c}$$

Q21 $\rightarrow$ $\tau_x - \tau_y = \frac{n h_+(t)(L_2^0 + L_1^0)}{c} + \frac{2n(L_1^0 - L_2^0)}{c}$

$$\Delta\phi = \phi_0 + 2nk\delta x = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(n h_+(t)(L_2^0 + L_1^0) + 2n(L_1^0 - L_2^0)\right)$$

$$\phi_0 + 2nk\delta x = 2nk\, h_+(t) L_0 + \underbrace{2nk(L_1^0 - L_2^0)}_{\phi_0}$$

D'où $\boxed{\delta x = h_+(t) L_0}$

47 On utilise L_0 le + grand possible pour que <u>δx soit le + grand possible</u> et obtenir une modification visible de la figure d'interférence.

$$\underline{\delta x = 3.10^3 . 10^{-21} = 3.10^{-18}\ \text{m} \ll 1064\ \text{nm} = \lambda}$$

$\delta x \ll$ diamètre d'un atome (10^{-10} m)

$$\Delta\phi - \phi_0 = 2nk\delta x = \frac{4\pi}{\lambda}\delta x = \frac{4\pi \times 3.10^{-18}}{1064.10^{-9}}$$

$$\underline{\Delta\phi - \phi_0 = 3{,}5.10^{-4}\ \text{rad}}$$