



Durée 4h - L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'épreuve se compose de 2 problèmes totalement indépendantes.

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. La présentation de schémas clairs, légendés et soignés est également attendue pour expliciter les choix d'orientations ou introduire des grandeurs physiques.*

*Dans toute l'épreuve, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Les principaux résultats seront encadrés.*

## 1 Centres de données spatiaux

Un centre de données — data center en anglais — est un lieu regroupant des installations informatiques chargées de stocker et de distribuer des données (data). Ces dernières années, l'expansion des services en ligne a entraîné une croissance exponentielle du nombre de centres de données, dégageant de grandes quantités de chaleur. La régulation en température de ces lieux est donc devenue un enjeu environnemental majeur.

Afin de lutter contre les cyberattaques, mais surtout de profiter d'un refroidissement optimal et « gratuit », une start-up californienne projette de stocker des données dans des satellites en orbite à basse altitude autour de la Terre. Le projet prévoit la mise en orbite de 10 satellites en tout.

Données disponibles pour ce problème :

- Constante de la gravitation universelle  $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
- Masse de la Terre  $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Rayon moyen de la Terre  $R_T = 6,40 \times 10^6 \text{ m}$
- Perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Vitesse de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Charge élémentaire  $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron  $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Masse du proton  $m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Chaque satellite est assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m_s = 4 \text{ t}$ , en orbite circulaire à l'altitude  $h = 650 \text{ km}$  autour de la Terre de centre  $O$ , de rayon  $R_T$  et de masse  $M_T$ . On suppose que la Terre est un astre présentant une répartition de masse à symétrie sphérique de centre  $O$ . Les frottements sont négligés ; seule la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est à prendre en compte.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , de repère associé  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , supposé galiléen. L'axe  $(Oz)$  est défini de sorte que la trajectoire du satellite considéré soit contenue dans le plan  $z = 0$ . L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  associée à ce plan (figure 1).

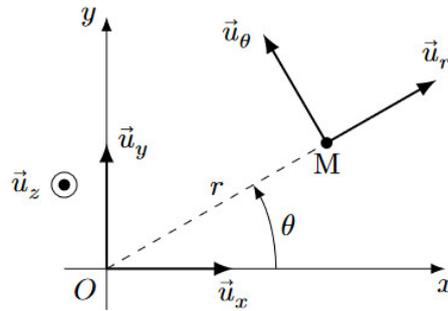


FIGURE 1 – Paramétrage polaire

1. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
2. Déterminer l'expression de la vitesse orbitale du satellite  $v_0$  sur son orbite circulaire en fonction de la constante de gravitation universelle  $\mathcal{G}$  et des paramètres  $M_T$ ,  $R_T$  et  $h$ .
3. Évaluer numériquement la vitesse  $v_0$ , ainsi que la période de révolution  $T_0$  correspondante.

Pour appréhender la difficulté à communiquer avec les satellites de basse altitude directement depuis la surface de la Terre, on peut se référer à un article publié sur le site Internet du journal Le Monde le 13 janvier 2017, intitulé « Comment communique-t-on en direct avec l'ISS ? ». Dans cet article, publié lors du premier séjour de l'astronaute Thomas Pesquet à bord de la Station Spatiale Internationale (ISS), on peut lire l'extrait suivant.

« La Station Spatiale Internationale (ISS) étant sur une orbite basse, elle survole la surface terrestre d'assez près (environ 400 kilomètres). À cette altitude, la vitesse orbitale est très rapide (environ 27 500 km/h, soit 7,6 km par seconde), rendant toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute. La communication avec l'ISS passe donc par des satellites relais positionnés très haut, sur une orbite dite géostationnaire, à 36 000 kilomètres d'altitude, qui permet aux satellites qui y sont de rester au-dessus d'un point de la surface terrestre de façon fixe. [...] Ces satellites servent de relais de communication aussi bien pour des équipages humains que pour de nombreux satellites placés sur une orbite basse qui ont également besoin de communiquer avec les équipes au sol. »

4. Discuter quantitativement l'affirmation selon laquelle « la vitesse orbitale [rend] toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute ».

Vis-à-vis de la propagation des ondes électromagnétiques, les premières couches de l'atmosphère peuvent être assimilées au vide. À partir de 80 km d'altitude, dans l'ionosphère, il y a présence d'un gaz ionisé, très dilué, appelé plasma. Le vide et le plasma ont pour permittivité diélectrique  $\epsilon_0$  et pour perméabilité magnétique  $\mu_0$ . L'onde de communication envoyée depuis la surface de la Terre vers le satellite est supposée plane, progressive selon l'axe  $(Ox)$  et harmonique de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $k\vec{u}_x$ . En notation complexe, son champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_y$$

où  $i^2 = -1$  et  $E_0$  est un nombre qui peut être supposé réel grâce à un choix judicieux de l'origine des temps.

5. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.
6. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe  $\vec{E}(M, t)$  dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?
7. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  associé au champ électrique  $\vec{E}(M, t)$ .

L'onde de communication doit ensuite traverser l'ionosphère. Le plasma ionosphérique se caractérise par une densité volumique d'électrons libres  $n_e$  de charge  $-e$ , de masse  $m_e$ , et une densité volumique de cations  $n_c = n_e$  de charge  $+e$ , de masse  $m_c$  ; l'ensemble est donc localement neutre. L'onde étudiée est maintenant notée

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x))\vec{u}_y$$

où on pose  $\underline{k} = k' + ik''$ . On considère que  $n_c$ ,  $n_e$ ,  $E_0$ ,  $\omega$ ,  $k'$  et  $k''$  sont réels, uniformes et constants. De plus, on s'intéresse uniquement à la situation où  $k' \geq 0$  et  $k'' \leq 0$ .



Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera toute autre action et on supposera, en outre, que les particules possèdent des vitesses très petites devant  $c$ .

8. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.
9. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par  $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial x}$ , déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe  $\vec{v}_e$  d'un électron, positionné en  $M$  à l'instant  $t$ , en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $\omega$  et  $\vec{E}(M, t)$ . De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse  $\vec{v}_c$  d'un cation. Que peut-on dire de  $\|\vec{v}_c\|$  par rapport à  $\|\vec{v}_e\|$  ?
10. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant  $\vec{j}(M, t)$ . En déduire l'expression de la conductivité complexe du plasma.
11. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.
12. Établir l'équation de propagation du champ  $\vec{E}(M, t)$  dans le plasma.
13. En déduire l'expression de  $k^2$  dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée  $\omega_p$  dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi  $c$ ,  $e$ ,  $\epsilon_0$ ,  $m_e$  et  $n_e$ .

On suppose dans un premier temps  $\omega < \omega_p$ .

14. Expliciter l'expression de  $k$  et en déduire les expressions des champs réels  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$ . On fera apparaître une épaisseur caractéristique  $\delta_p$  que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_p$  et  $c$ . Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue.
15. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

On suppose désormais que  $\omega > \omega_p$ .

16. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de  $k$ . En déduire les expressions des champs réels  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$ , puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.
17. Déterminer l'expression de la vitesse de phase  $v_\varphi$  ainsi que celle de la vitesse de groupe  $v_g$  en fonction de  $\omega_p$ ,  $\omega$  et  $c$ . Tracer  $v_\varphi$  et  $v_g$  en fonction de  $\omega$ . Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à  $c$  et commenter.

En réalité, la densité électronique  $n_e$  dans l'ionosphère varie dans le temps et en fonction de l'altitude. La figure 2 présente son évolution.

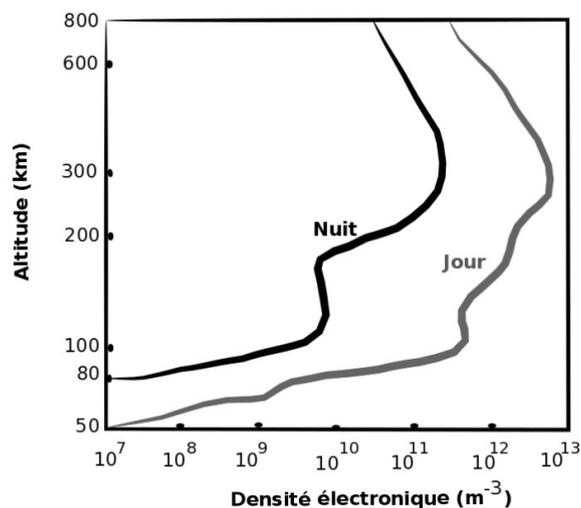


FIGURE 2 – Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences - Physique, ENS Lyon)

18. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?

## 2 L'expérience d'Elihu-Thomson

Projets futuristes dans les années 1970, la propulsion et la sustentation magnétiques sont aujourd'hui une réalité (figure 3). Le train à lévitation magnétique, ou Maglev, utilise les forces magnétiques pour assurer sa sustentation, son guidage et sa propulsion. En régime de croisière, il n'y a pas de roues en contact avec des rails, ce qui permet de réduire les frottements et d'atteindre des vitesses élevées. Le record de vitesse actuel, établi en 2003, est de 581 km/h.



FIGURE 3 – Photo du train à grande vitesse de Shanghai

Le problème ci-dessous s'intéresse à une expérience historique de lévitation magnétique dite « expérience d'Elihu-Thomson »

Dans l'ensemble du problème, l'axe vertical ascendant est représenté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  et  $z$  est sa coordonnée associée. Les vecteurs horizontaux  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  complètent la base orthonormée directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

Un solénoïde ( $S$ ), de section circulaire, d'axe vertical ascendant ( $Oz$ ), de rayon  $b$  et comprenant  $n$  spires jointives par unité de longueur est parcouru par un courant, d'intensité instantanée  $i_S(t) = I_S \cos(\omega t)$ . On note  $R_S$  la résistance électrique de l'enroulement et  $L_S$  son inductance propre. L'origine  $O$  de l'axe ( $Oz$ ) est au centre de la face supérieure du solénoïde, qui est donc situé dans la région  $z < 0$ . Un anneau métallique indéformable circulaire ( $A$ ), de masse  $m$ , de rayon  $a$ , d'épaisseur négligeable et d'axe ( $Oz$ ), est initialement maintenu en  $z = 0$ . Cet anneau est mobile sans frottement et sans jeu, parallèlement au plan horizontal et en restant centré sur l'axe. Il comprend, selon les expériences,  $N = 1$  ou  $2$  spires toujours identiques, en série et parcourues par un courant instantané noté  $i_A(t)$ . Le cylindre central, en grisé sur la figure 4, nommé noyau, a pour fonction de guider le mouvement de l'anneau selon l'axe ( $Oz$ ). Dans ce problème on ne tient pas compte des propriétés magnétiques du noyau.

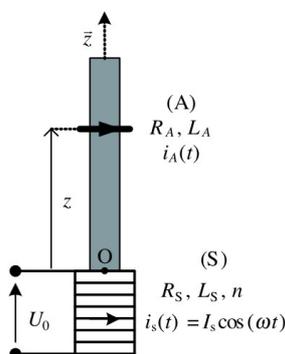


FIGURE 4 – Schématisation de l'expérience d'Elihu-Thomson

L'ensemble du dispositif possède donc une symétrie cylindrique autour de l'axe ( $Oz$ ); les conventions d'orientation des deux circuits sont les mêmes. La masse volumique du matériau constituant l'anneau est notée  $\mu_M$ , sa conductivité électrique  $\sigma_M$ ; on a donc  $m \propto N\mu_M$ , où le symbole «  $\propto$  » signifie « est, toutes choses égales par ailleurs, proportionnel à ... ». La résistance d'une spire est notée  $r_A$  et son inductance propre  $\ell_A$ ; la résistance de l'anneau est donc  $R_A = Nr_A \propto N\sigma_M$ .

L'inductance mutuelle entre ( $S$ ) et ( $A$ ), notée  $M$ , dépend de  $z$  et bien sûr de  $N$ . On dispose de divers anneaux, en cuivre ou en aluminium, avec  $\mu_{Cu} \approx 3\mu_{Al}$  et  $\sigma_{Cu} \approx 1,7\sigma_{Al}$ . On note  $\varphi$  le flux magnétique envoyé par le solénoïde à travers un anneau donné.

*Données numériques :*

L'anneau est constitué d'une spire unique de cuivre, de masse  $m_1 = 12 \times 10^{-3}$  kg, avec  $r_A = 1,0 \times 10^{-4} \Omega$ ,  $\ell_A = 1,0 \times 10^{-7}$  H, l'intensité de la pesanteur est  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ; pour simplifier le traitement, on conviendra que le diamètre du noyau est  $D = 2a = 4 \times 10^{-2}$  m.



Dans tout le problème, on note, en coordonnées cylindriques,  $\vec{B}(r, z; t) = \vec{B}(r, z) \cos(\omega t)$  le champ créé en un point  $P(r, \theta, z)$  par le solénoïde. La relation  $\vec{B}(0, z) = \vec{B}_0(z) = B_0(z)\vec{u}_z$  définit la fonction  $B_0(z)$ , champ sur l'axe  $(Oz)$ .

À l'instant initial, l'anneau est libéré. On constate les faits suivants :

- $F_1$  : L'anneau (A), projeté vers le haut, se stabilise à une certaine hauteur  $z_0$ . La position d'équilibre est stable.
- $F_2$  : Un anneau constitué de deux spires identiques (masse totale  $m = m_2 = 2m_1$ ) se stabilise plus haut qu'un anneau constitué d'une seule spire, identique aux deux premières.
- $F_3$  : Les cotes d'équilibre pour deux anneaux géométriquement identiques, mais constitués l'un en aluminium l'autre en cuivre sont différentes :  $z_0(\text{Al}) > z_0(\text{Cu})$ .

## 2.1 Considérations générales

1. En considérant le flux du champ magnétique (vecteur  $\vec{B}$ ) à travers un cylindre élémentaire d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $r$  et de hauteur  $dz$ , montrer que le champ radial en un point  $P(r, \theta, z)$  au voisinage immédiat de l'axe est  $\vec{B}_r(r, z; t) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz} \cos(\omega t) \vec{e}_r$ , où  $\vec{e}_r$  est, en coordonnées cylindriques, le vecteur unitaire radial.
2. L'anneau est maintenu à une cote constante. On admet que la composante parallèle à  $(Oz)$  de la force électromagnétique à laquelle l'anneau est soumis s'exprime par la relation  $F(z, t) = i_A(t)i_S(t) \frac{dM}{dz}$ . Vérifier que  $F(z, t) = i_A(t) \frac{d\varphi}{dz}$ , où  $\varphi$  est le flux du champ magnétique du solénoïde  $(S)$  à travers l'anneau  $(A)$ .
3. Donner l'expression générale de la force électromotrice (fém) induite par  $(S)$  dans  $(A)$ , en fonction de  $i_S(t)$  et de  $M$ .
4. Expliciter la réponse, en fonction de  $\omega$ ,  $\varphi_0(z) = \pi a^2 B_0(z)$  et  $\sin(\omega t)$  lorsque l'inégalité  $a \ll b$  est satisfaite.
5. Notant  $i_A(t)$  le courant qui circule dans l'anneau  $(A)$ , maintenu à la cote  $z$ , exprimer la résultante instantanée des forces de Laplace qui s'exercent sur cet objet.
6. Montrer que l'inductance propre de  $(A)$  est  $L_A = N^2 \ell_A$  et que l'inductance mutuelle  $M$ , varie linéairement avec  $N$ ; on notera  $M = NM_1$ , ce qui définit  $M_1$ .

## 2.2 Interprétation des observations $F_1 - F_3$

On suppose que l'anneau n'est sensible qu'à la valeur moyenne dans le temps de la résultante des forces de Laplace,  $\langle \vec{F}_L \rangle_t$ . On relaxe l'hypothèse  $a \ll b$ ; on n'explicite plus la forme du champ  $\vec{B}$ , seuls interviendront les inductances et les autres paramètres des circuits. On impose toujours  $i_S(t) = I_S \cos(\omega t)$  et l'on suppose que l'anneau est fixe (il n'y a pas de variation de flux, et donc de fém associée à un mouvement).

7. On suppose provisoirement que  $\ell_A$  est nulle. Montrer que  $\langle \vec{F}_L \rangle_t = \vec{0}$ .
8. On suppose que  $\ell_A$  n'est pas nulle, mais que  $r_A$  est nulle. Exprimer  $\langle \vec{F}_L \rangle_t$  dans ce cas.
9. La modélisation de la question précédente est-elle compatible avec les faits expérimentaux observés ?
10. Aucune des grandeurs  $R_S$ ,  $L_S$ ,  $r_A$  et  $\ell_A$  n'est supposée désormais nulle. La tension aux bornes du solénoïde est notée  $u_S(t) = U_0 \cos(\omega t)$ . Exprimer la loi des mailles pour le solénoïde et pour l'anneau.
11. On note en représentation complexe  $\underline{I}_A$  et  $\underline{I}_S$  les amplitudes complexes des intensités  $i_A(t)$  et  $i_S(t)$ ,  $Z_A = R_A + jL_A\omega = |Z_A| \exp(j\phi_A)$ ,  $Z_S = R_S + jL_S\omega = |Z_S| \exp(j\phi_S)$ ,  $Z_{AS} = jM\omega$  et  $D^2 = Z_A Z_S + M^2\omega^2 = |D|^2 \exp(2j\phi_D)$ . Exprimer  $\underline{I}_A$  et  $\underline{I}_S$  en fonction de  $Z_A$ ,  $D$ ,  $U_0$  et  $Z_{AS}$ . En déduire les expressions de  $i_S(t)$  et de  $i_A(t)$ .
12. Établir la relation suivante pour la force moyenne subie par un anneau constitué de  $N$  spires :

$$\langle F \rangle_t \propto \frac{N^2}{[r_A R_S + N\omega^2(M_1^2 - \ell_A L_S)]^2 + \omega^2(r_A L_S + N\ell_A R_S)^2}$$

13. Application numérique : Calculer  $\frac{F(2)}{F(1)}$ , rapport des forces magnétiques agissant respectivement sur un anneau constitué de deux spires et sur un anneau d'une spire pour  $R_S = 2\Omega$ ,  $\ell_A = 1,0 \times 10^{-7} \text{ H}$ ,  $L_S = 0,1 \text{ H}$ ,  $M_1 = 5,0 \times 10^{-5} \text{ H}$  et  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$  (50 Hz).
14. Interpréter  $F_2$ .
15. Interpréter  $F_3$ .