



Durée 4h - L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'épreuve se compose de 5 parties totalement indépendantes.

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. La présentation de schémas clairs, légendés et soignés est également attendue pour expliciter les choix d'orientations ou introduire des grandeurs physiques.*

*Dans toute l'épreuve, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Les principaux résultats seront encadrés.*

## Mesures de champs magnétiques

Dans ce problème sont abordées quelques méthodes de mesure de champs magnétiques, permanents ou éventuellement lentement variables dans le temps. Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple  $\vec{B}$  pour le champ magnétique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple  $\hat{u}$  tel que  $||\hat{u}|| = 1$ . Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen. On rappelle que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### 1 La balance de Cotton

La photo d'un modèle de balance de Cotton est placée ci-contre. Ce type de balance, destinée à la mesure de champ magnétique, a été mis au point par Aimé Cotton en 1900. Elle est constituée de deux fléaux. L'un, à gauche, comprend sur sa périphérie, un conducteur métallique qui sera parcouru par un courant et dont une partie sera placée dans le champ magnétique, uniforme et permanent, à mesurer. Le conducteur sera soumis à des forces de Laplace et la balance penchera du côté de ce fléau. L'autre comporte un plateau sur lequel on peut déposer des masses marquées pour équilibrer la balance et déduire ainsi la norme du champ magnétique. Le schéma de principe de la balance est représenté sur la figure 2.



FIGURE 1 – Balance de Cotton

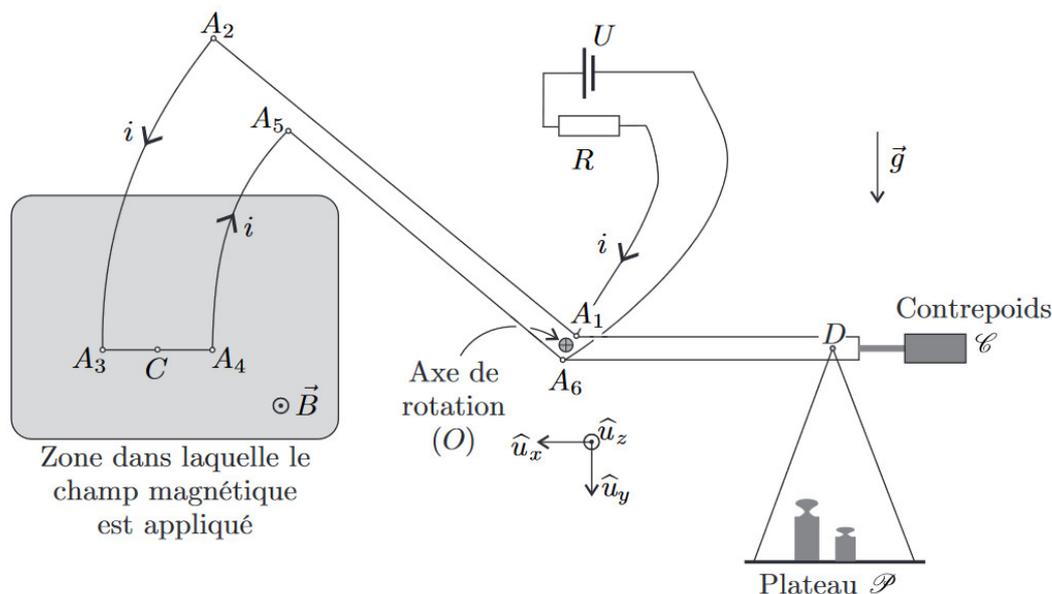


FIGURE 2 – Modélisation simple d'une Balance de Cotton

Sur le fléau dessiné à gauche, les conducteurs permettent le passage d'un courant d'intensité  $i$ , selon le parcours  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$ . Les portions de circuit  $A_2A_3$  et  $A_4A_5$  sont des arcs de cercle de même centre  $O$ . L'ensemble des deux fléaux constitue un système rigide, mobile sans frottement, autour d'un axe horizontal passant par le point  $O$  et noté  $Oz$ .

On désigne par  $C$  le milieu du segment  $A_3A_4$  et  $D$  le point de suspension du plateau. On note  $d_1$  la distance  $OC$  entre les points  $O$  et  $C$ ,  $d_2$  la distance  $OD$  entre les points  $O$  et  $D$  et  $\ell$  la longueur du segment  $A_3A_4$ .

La procédure de mesure est la suivante :

I équilibrage « à vide » : en l'absence de courant  $i$  et de masses marquées dans le plateau, le contrepoids  $C$  est déplacé de façon à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points  $C$ ,  $O$  et  $D$  étant alignés sur l'horizontale.

II Mesure du champ : on ferme le circuit électrique, ce qui permet au courant d'intensité  $i$  de circuler « dans la balance », le fléau de gauche penche vers le bas; on ajoute alors des masses dans le plateau jusqu'à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points  $C$ ,  $O$  et  $D$  étant alignés sur l'horizontale.

1. Montrer que, lorsque l'équilibrage à vide est réalisé, le centre de masse  $G$ , des parties mobiles de la balance est situé en  $O$ .
2. Lorsque le courant circule « dans la balance », montrer que le moment en  $O$  des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul. On pourra expliciter une base polaire pour exprimer les différents termes intervenant dans l'expression du moment.
3. À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en  $O$  des forces de Laplace. En déduire la relation liant  $B = \|\vec{B}\|$ , la somme  $m$  des masses marquées posées sur le plateau,  $i$ ,  $\ell$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  et l'intensité  $g$  du champ de pesanteur  $\vec{g}$ .
4. La sensibilité de la balance étant de  $\delta m = 0,05$  g, déterminer la plus petite valeur de  $B$  mesurable pour  $i = 10$  A,  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\ell = 5$  cm et  $d_1 = d_2 = 10$  cm. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

## 2 Utilisation d'une boussole

### 2.1 Étude générale

Dans cette partie on utilise une boussole constituée d'une aiguille aimantée mobile, présentant un axe de symétrie longitudinal. Cette aiguille peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son centre de masse  $G$  et perpendiculaire à l'axe de symétrie. La liaison avec l'axe est du type « pivot parfait » sans frottement.



FIGURE 3 – Boussole aimantée

Cette aiguille aimantée se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}_m$  ayant la direction de l'axe de symétrie de celle-ci et situé dans un plan horizontal ( $G, \hat{u}_x, \hat{u}_y$ ). Cette boussole est placée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\hat{u}_x$ , permanent et localement uniforme (il est considéré comme uniforme tout le long de l'aiguille aimantée). Les forces magnétiques soumettent la boussole à un couple  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}}_m \wedge \vec{B}$ . On note  $J$  le moment d'inertie de l'aiguille aimantée par rapport à l'axe de rotation. Dans un premier temps nous allons étudier les petits mouvements de l'aiguille autour de sa position d'équilibre stable, en négligeant les frottements fluides dus à l'air. On appelle  $\alpha$  l'angle entre la direction de  $\vec{B}$  et celle de  $\vec{\mathcal{M}}_m$ . On note également  $\hat{u}_z$  le vecteur unitaire définissant la verticale ascendante.  $(G, \hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$  forme une base directe.

5. Après avoir exprimé le couple des forces magnétiques s'exerçant sur l'aiguille en fonction des paramètres du problème que sont  $B = \|\vec{B}\|$ ,  $\mathcal{M}_m = \|\vec{\mathcal{M}}_m\|$  et  $\alpha$ , établir l'équation différentielle dont  $\alpha$  est solution. En déduire les positions d'équilibres de l'aiguille, et indiquer sans calcul l'équilibre stable. En supposant  $\alpha \ll 1$ , donner l'expression de  $\alpha(t)$  en notant  $\alpha_0$  la valeur maximale de cet angle, en faisant apparaître le rapport  $k = \frac{\mathcal{M}_m}{J}$  et en supposant que  $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On cherche à mesurer le rapport  $k$ . Pour cela on mesure la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée placée dans un champ magnétique uniforme connu, créé par des bobines de Helmholtz.

Les bobines de Helmholtz sont constituées de deux bobines plates, c'est-à-dire d'épaisseurs négligeables, identiques et équidistantes. Chacune d'entre elles comprend  $N$  spires circulaires de rayon  $R$ , parcourues par le même courant d'intensité  $I$  et dont le sens est indiqué sur la figure 4. Ces deux bobines sont distantes de  $d = R$ . L'axe  $Ox$  de révolution des spires a pour origine le point  $O$  tel que les bobines soient équidistantes de celui-ci. On montre qu'en un point  $M$  situé à l'abscisse  $x$ , sur l'axe  $Ox$ , le champ magnétique  $\vec{B}(x)$  créé par les bobines s'écrit :

$$\vec{B}(x) = N\vec{B}_0 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{x}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[ 1 + \left( \frac{x}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}$$

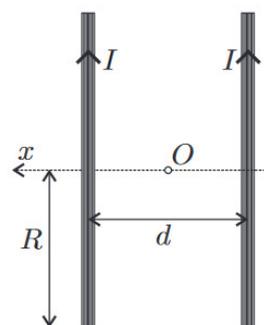


FIGURE 4 – Bobines de Helmholtz

6. La quantité  $B_0 = \|\vec{B}_0\|$  s'exprime en fonction de  $\mu_0$ ,  $R$  et  $I$ . Par comparaison avec d'autres champs magnétiques, choisir en justifiant précisément ce choix, l'expression de  $B_0$  parmi les suivantes :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad B_0 = \frac{\mu_0 R}{2I} \quad B_0 = \frac{\mu_0 I R}{2} \quad B_0 = \frac{I R}{2\mu_0}$$

7. Les bobines ont un rayon  $R = 15 \text{ cm}$ . On donne le développement limité suivant :

$$\left[ 1 + \left( X \pm \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[ 1 \mp \frac{6}{5}X \pm \frac{32}{25}X^3 - \frac{144}{125}X^4 + o(X^4) \right]$$

Dans quelle zone située sur l'axe  $Ox$ , peut-on considérer que la variation relative de la norme du champ est inférieure à 2% ? Préciser la valeur numérique de cette norme sachant que  $N = 50$  spires et  $I = 4 \text{ A}$  ?

8. La valeur mesurée de la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée est  $T = 0,30 \text{ s}$ . Déterminer l'unité et calculer la valeur numérique du rapport  $k$  pour cette boussole.

## 2.2 Applications au champ magnétique terrestre

On se place à Paris dont l'altitude (42 m) est négligeable devant le rayon terrestre  $R_T = 6400 \text{ km}$ , la longitude est  $\phi = 2^\circ 21'$  et la latitude  $\lambda = 48^\circ 52'$  nord. On rappelle que la latitude est l'angle entre le plan de l'équateur et le rayon terrestre passant par le point considéré. On effectue deux mesures avec la boussole précédemment calibrée :

- Quand l'axe de rotation de la boussole est vertical, la période des petites oscillations de la boussole (dans le plan horizontal) est de  $T = 2,31 \text{ s}$ .
- Quand l'axe de rotation de la boussole est horizontal et que l'axe de symétrie de l'aiguille aimantée est dirigé selon le champ magnétique local vers le Nord magnétique terrestre, l'aiguille fait, à l'équilibre, un angle  $i = 64^\circ 0'$  avec l'horizontale locale.

On suppose que le champ magnétique terrestre est celui d'un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mathcal{M}}_T$  placé au centre de la Terre, dont la direction est celle d'un axe  $(O, \hat{u}_z)$  passant par les deux pôles magnétiques et orienté du nord vers le sud.

On indique qu'un dipôle magnétique situé en l'origine  $O$  du référentiel considéré, d'axe  $(O, \hat{u}_z)$  et de moment  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\hat{u}_z$ , crée en un point  $M$  éloigné de  $O$  et de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  un champ magnétique

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta)$$

Dans le système de coordonnées sphériques adapté à la géométrie du champ magnétique terrestre, l'angle  $\theta = 0$  indique la direction du pôle sud magnétique et  $\phi$  correspond à une longitude.

9. Après avoir fait un schéma représentant  $\vec{\mathcal{M}}_T$  ainsi que le vecteur  $\vec{B}(M)$ , les angles  $i$  et  $\theta$  si le point  $M$  est la ville de Paris, déduire des mesures effectuées que la coordonnée  $\theta$  de cette ville vaut environ  $136^\circ$ . Que peut-on en conclure concernant l'axe de symétrie du champ magnétique terrestre et l'axe de rotation de la Terre?
10. En exploitant les mesures effectuées et le résultat de la question 8, exprimer puis calculer  $\mathcal{M}_T = \|\vec{\mathcal{M}}_T\|$  ainsi que l'intensité du champ magnétique terrestre à Paris.

### 3 Utilisation d'une sonde à effet Hall

L'élément principal d'une sonde à effet Hall est une plaquette constituée d'un semi-conducteur, dopé N, dans laquelle les porteurs de charges libres sont des électrons, dont la charge est  $q = -e = -1,6 \times 10^{-19}$  C. La densité volumique de ces électrons dans cette plaquette est  $n = 3,30 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ . Cette plaquette possède la forme d'un parallélépipède, dont les six faces sont numérotées conformément à la figure 5, ses dimensions sont  $a = 3 \text{ mm}$ ,  $b = 6 \text{ mm}$  et  $c = 0,2 \text{ mm}$ . Les faces 1 et 3 sont reliées aux bornes d'une source de courant idéale, délivrant un courant d'intensité  $I_0 = 10 \text{ mA}$  constante. En régime permanent, on peut considérer que les lignes de courant sont rectilignes et parallèles, le vecteur densité volumique de courant est uniforme et s'écrit  $\vec{j} = j\hat{u}_x$ .

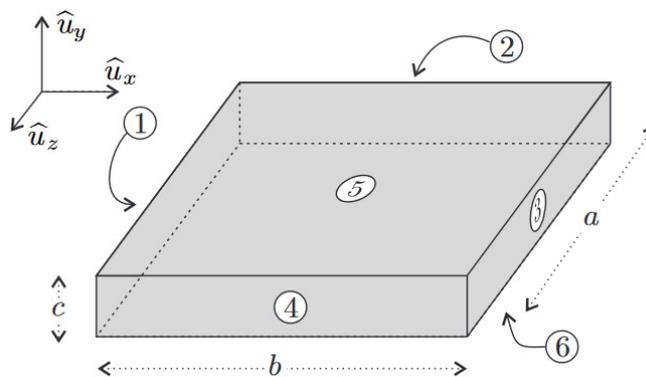


FIGURE 5 – Plaquette semi-conductrice

11. Établir l'expression de la vitesse  $\vec{v}$  des porteurs de charge et calculer sa norme.

La plaquette est placée dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique considéré comme constant, tel que  $\vec{B} = B\hat{u}_y$  avec  $B > 0$ .

12. Après avoir exprimé la force magnétique s'exerçant sur une charge mobile, justifier que des densités surfaciques de charge apparaissent sur les faces 2 et 4. On précisera les signes de ces densités.

Ces densités surfaciques de charges créent un champ électrique  $\vec{E}_h = E_h\hat{u}_z$  au sein de la plaquette. En régime permanent, la vitesse des porteurs de charge reste inchangée.

13. En appliquant le principe fondamental de la mécanique à un porteur de charge en projection sur  $\hat{u}_z$ , déterminer l'expression de  $E_h$ . Montrer qu'il apparaît une différence de potentiel  $u_h = V_4 - V_2$  entre les faces 4 et 2. Celle-ci est appelée tension de Hall, on l'écrira sous la forme  $u_h = \gamma B$  en précisant l'expression et la valeur numérique de la constante  $\gamma$ .

On veut maintenant vérifier l'influence du champ magnétique propre  $\vec{B}_0$  créé par le courant  $I_0$ . Pour cela on adopte un modèle simplifié dans lequel la plaquette est supposée infiniment longue dans les directions  $\hat{u}_x$  et  $\hat{u}_z$  uniquement. Le semi-conducteur est supposé avoir la même perméabilité  $\mu_0$  que le vide.

14. Déterminer, dans ce modèle, la direction de  $\vec{B}_0$  ainsi que les variables spatiales du problème dont ce champ ne dépend pas. À l'intérieur de la plaquette où la variable  $y \in [-\frac{c}{2}, +\frac{c}{2}]$ , écrire l'équation différentielle dont  $\vec{B}_0$  est solution. En déduire l'expression de  $\vec{B}_0$ . Calculer la valeur maximale de la norme de ce champ. Dans la mesure du champ terrestre, pourrait-on négliger l'influence de  $\vec{B}_0$  ?

## 4 Utilisation d'une magnétorésistance

On considère un conducteur électrique se présentant sous la forme d'une couronne cylindrique d'axe  $Oz$ , de hauteur  $h$ , délimitée par un cylindre intérieur de rayon  $r_1$  et par un cylindre extérieur de rayon  $r_2$ . À l'aide d'une source de tension on impose les potentiels  $V(r_1) = V_1$  et  $V(r_2) = V_2$ . On se place en régime permanent et on néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer que le comportement de cette couronne est le même que si elle était infiniment haute. L'existence de deux équipotentielles cylindriques permet d'émettre l'hypothèse que le potentiel ne dépend que de  $r$ , ainsi

$$V = V(r), \quad \Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) \text{ et } \vec{\text{grad}} V(r) = \frac{dV}{dr} \hat{u}_r$$

On paramètre le problème à l'aide d'une base cylindrique  $(O, \hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z)$ .

15. Vérifier que l'hypothèse  $V = V(r)$  est la seule possible. Exprimer le potentiel électrique en un point  $M$  de ce conducteur dans le cas où celui-ci est localement neutre en tout point en fonction de  $V_1, V_2, r, r_1$  et  $r_2$ . En déduire que le champ électrique  $\vec{E}$  en ce même point est de la forme  $\vec{E} = \frac{E_0}{r} \hat{u}_r$ . Exprimer  $E_0$  en fonction de  $V_1, V_2, r_1$  et  $r_2$ .

La couronne cylindrique est placée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B \hat{u}_z$  avec  $B > 0$ . Le conducteur contient  $n$  électrons libres par  $m^3$ . On considère de plus le modèle de Drude dans lequel chaque électron de vitesse  $\vec{v}$  est soumis, en plus des forces électromagnétiques, à une force de frottement s'exprimant sous la forme  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$  avec  $\lambda > 0$ .

16. Exprimer la loi de la quantité de mouvement pour un électron en régime permanent. En déduire les expressions, dans la base cylindrique des coordonnées de  $\vec{v}$  en fonction de  $e, \lambda, B$  et de l'intensité  $E(r)$  du champ électrique.
17. Exprimer le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  puis déterminer l'expression de l'intensité du courant électrique traversant une surface équipotentielle de rayon  $r$ . En déduire l'expression de la résistance électrique  $R$  de la couronne, en fonction de  $e, n, \lambda, B, h, r_1$  et  $r_2$ .

On note  $R_0$  la résistance en l'absence de champ magnétique. Exprimer l'écart relatif  $\epsilon = \left| \frac{R - R_0}{R_0} \right|$  en fonction de  $e, B$  et  $\lambda$ . Calculer la valeur numérique de  $R_0$  ainsi que celle de  $\epsilon$  pour  $B = 1,0 \text{ mT}$ ,  $r_1 = 1,0 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 3,0 \text{ mm}$ ,  $h = 1,0 \text{ mm}$ ,  $n = 1,1 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  et  $\lambda = 1,8 \times 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Commenter l'utilisation du phénomène de magnétorésistance pour la mesure de champs magnétiques.

## 5 Étude d'une pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant  $N$  spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ , d'épaisseur  $c$ , d'axe  $Oz$ . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique  $\lambda$ . Un point  $M$  intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques :  $\vec{OM} = r \hat{u}_r + z \hat{u}_z$  avec  $r \in [a, b]$  et  $z \in [0, c]$ . Un fil rectiligne infini de même axe  $Oz$  est parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$ . On note  $i_1(t)$  l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

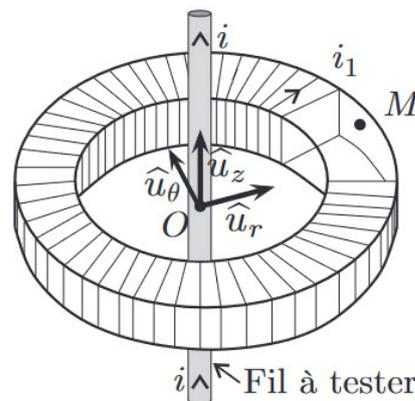


FIGURE 6 – PARTIE ACTIVE DE LA PINCE



18. Définir l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Justifier que, dans l'ARQS, on peut simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer alors le théorème d'Ampère.
19. Déterminer l'expression du champ  $\vec{B}$  généré par l'ensemble des courants  $i(t)$  et  $i_1(t)$  en tout point à l'intérieur du bobinage torique.
20. Exprimer le flux  $\phi$  de  $\vec{B}$  à travers une section du bobinage torique en fonction de  $i$ ,  $i_1$ ,  $N$ ,  $a$ ,  $b$  et  $c$ . En déduire les expressions du coefficient d'autoinductance du bobinage  $L$  et du coefficient de mutuelle inductance  $M$  entre le fil et le bobinage en fonction de  $N$ ,  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
21. Exprimer la résistance totale  $R_p$  du bobinage en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $N$  et  $\lambda$ .

On se place en régime sinusoïdal forcé avec  $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$  associée à l'intensité complexe  $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$  et  $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$  associée à l'intensité complexe  $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t + \varphi_1}$ .

22. Le bobinage formant un circuit fermé, exprimer la loi d'Ohm généralisée et en déduire l'expression de la fonction de transfert  $H = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$  en fonction de  $M$ ,  $\omega$ ,  $R_p$  et  $L$ .
23. Quelle est la nature du filtre réalisé? Dans quel gamme de pulsations ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique?