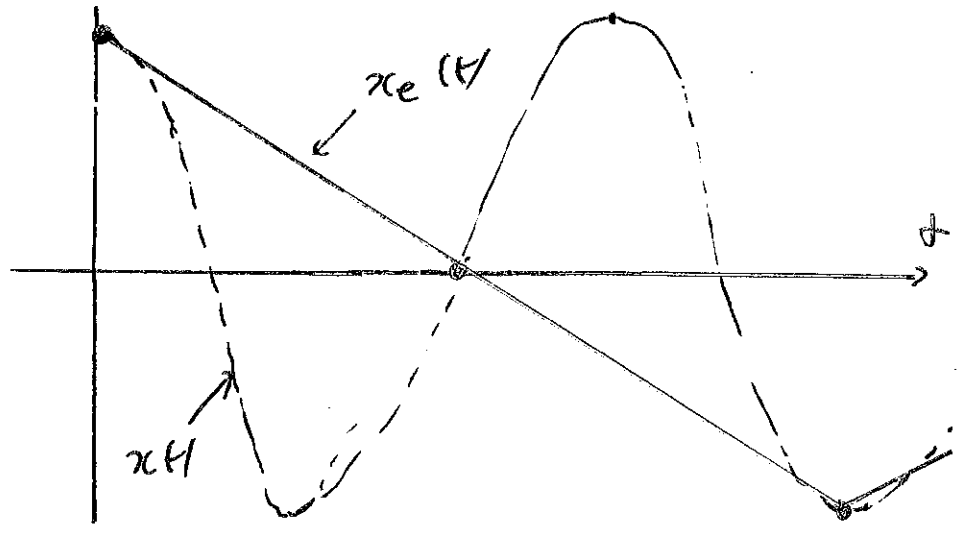
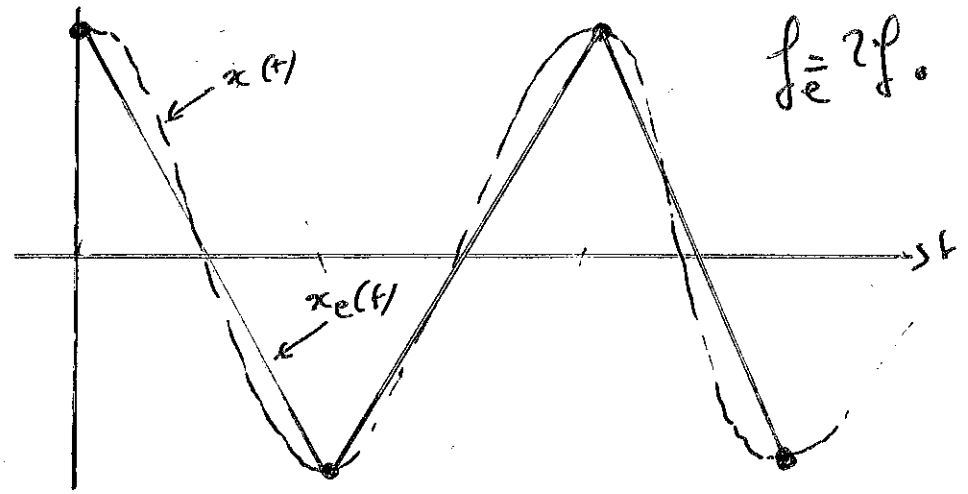
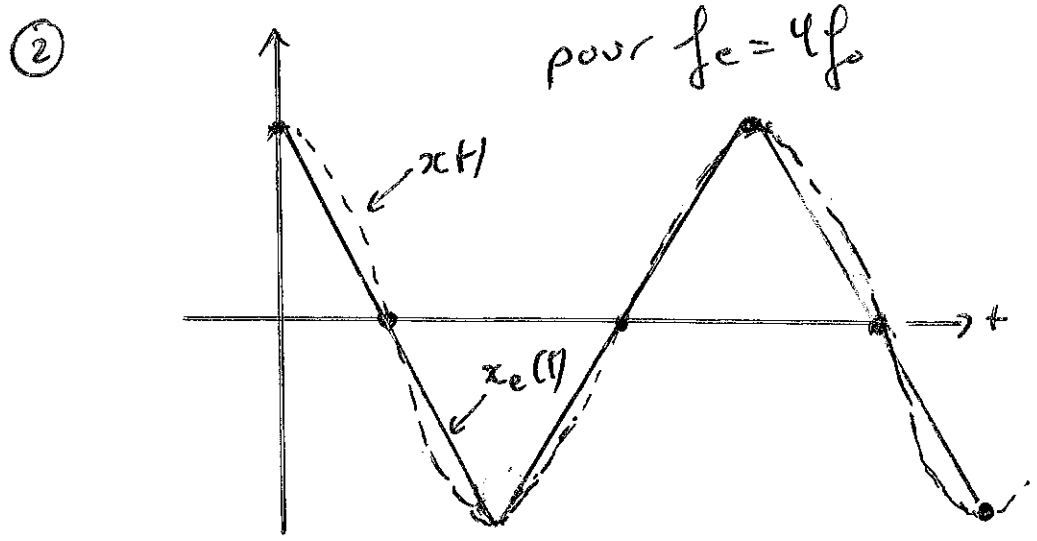
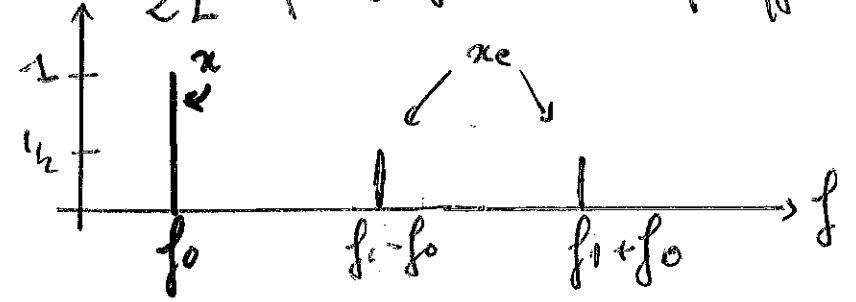


Fourier dans tous ses états (psi Nives 2022)

I Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique.

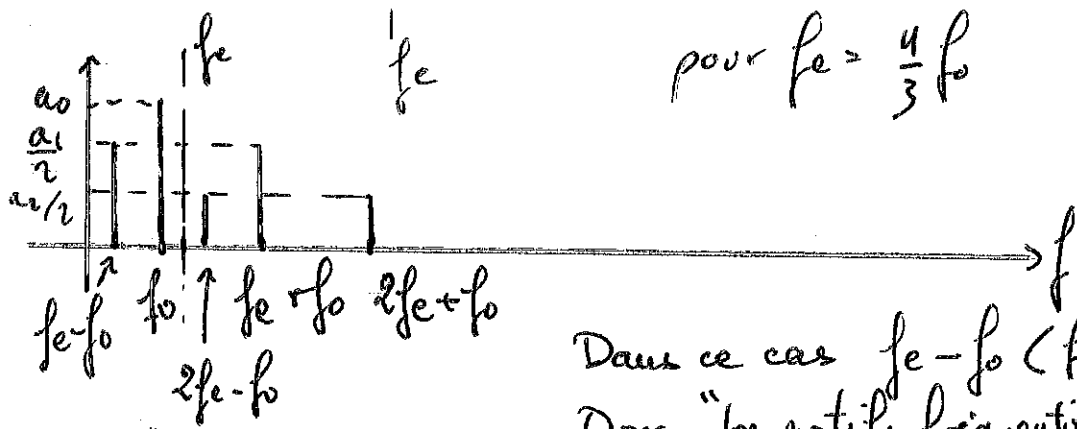
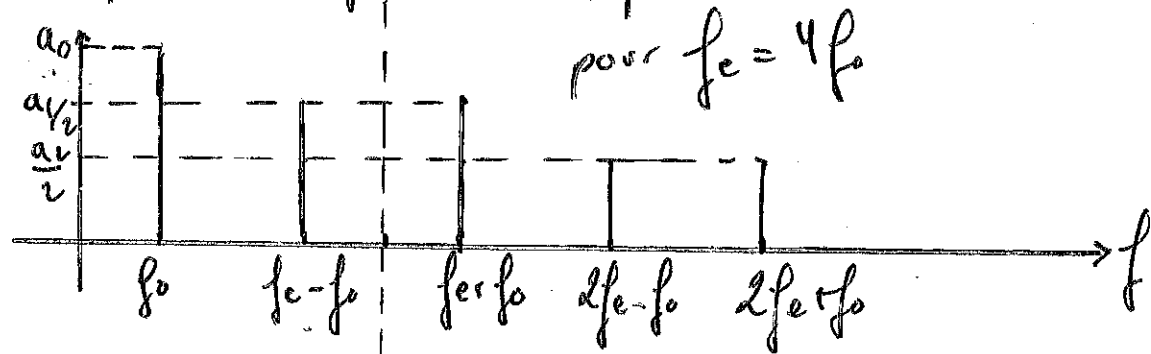
① $x_e(t) = x(t) p(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_s t)$
 $x_e(t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_0 + f_s)t) + \cos(2\pi(f_0 - f_s)t)]$



③ $x_e(t) = x(t) w(t)$
 $= \left[a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t) \right] x(t)$
 $x_e(t) = x(t) / a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi k f_e t)$

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} [\cos(2\pi(f_0 + k f_e)t) + \cos(2\pi(f_0 - k f_e)t)]$$

On représente le spectre de $x_e(t)$ pour des valeurs de $k \in [0, 2]$



Dans ce cas $f_e - f_0 < f_0$
Donc "les motifs fréquentiels se chevauchent"

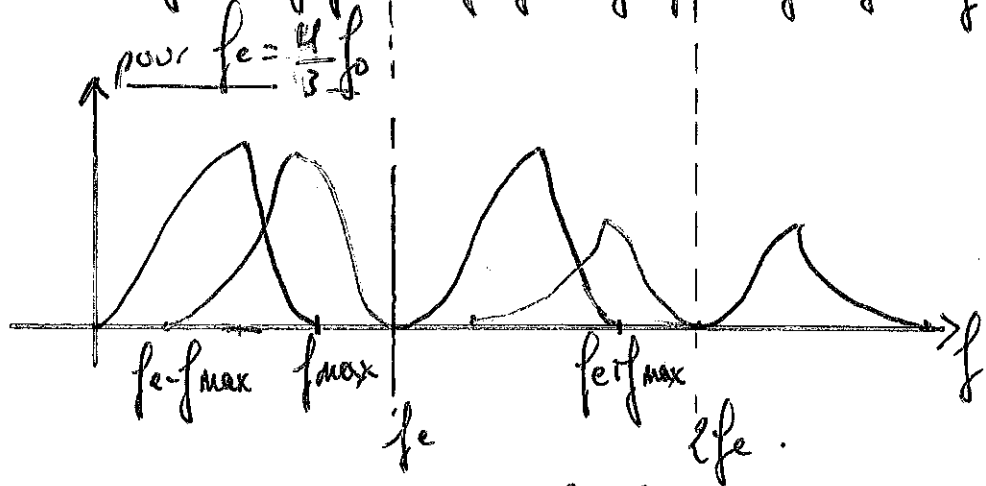
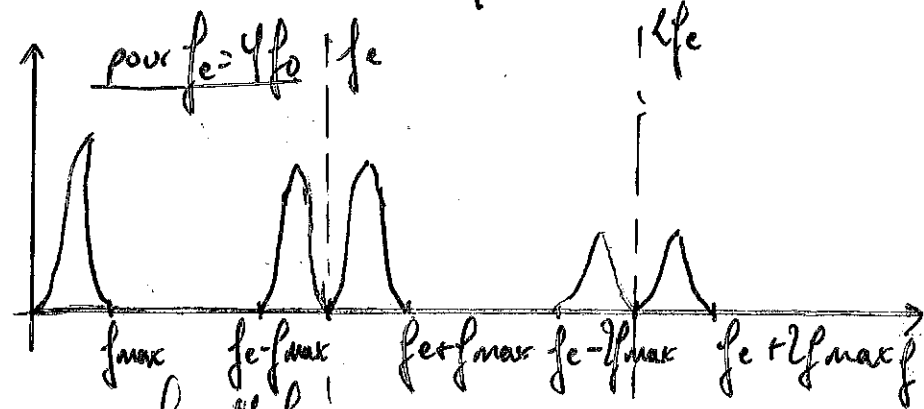
Il y a repliement de spectre.

Le repliement a lieu autour de $\frac{f_e}{2}$

④ On assure un bon échantillonnage si $\frac{f_e}{f_0} \geq 2$

⑤ Bon échantillonnage pour $\frac{f_e}{f_{max}} \geq 2$

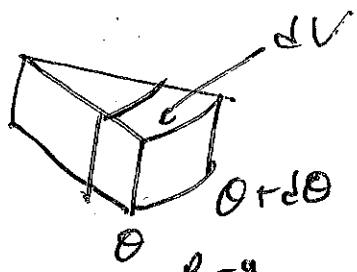
En ne considérant que les valeurs $k \in [0, 2]$



Pour un signal audible $f_0 \in [20; 20 \cdot 10^3] \text{ Hz}$
Donc $f_e \geq 40 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

⑥ Pour retrouver le signal de départ on peut utiliser un passe-bas de fréquence de coupure $< f_e - f_{max}$

11



$$dV = r dr d\theta dz$$

$$dV = \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} r dr \int_0^a dz d\theta$$

$$dV = \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \times a d\theta = \frac{1}{2} \left[\left(R + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(R - \frac{a}{2} \right)^2 \right] a d\theta$$

$$dV = \frac{1}{2} \left[R^2 + aR + \frac{a^2}{4} - R^2 + aR - \frac{a^2}{4} \right] a d\theta$$

$$dV = a^2 R d\theta$$

$$dS_{lat} = dS_{haut} + dS_{bas} + dS_{rrdr} + dS_{Rr\frac{a}{2}}$$

$$= (R - \frac{a}{2}) a d\theta + (R + \frac{a}{2}) a d\theta + 2 \times \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} r dr d\theta$$

$$dS_{lat} = 2 R a d\theta + 2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} d\theta$$

$$dS_{lat} = 2 R a d\theta + 2 R a d\theta = \underline{4 R a d\theta = dS_{lat}}$$

12 Bilan d'énergie sur le volume dV entre t et t+dt:

$$d^2U = \delta U(\theta, t+dt) - \delta U(\theta, t) = \delta m (u(\theta, t+dt) - u(\theta, t))$$

$$d^2U = \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV dt$$

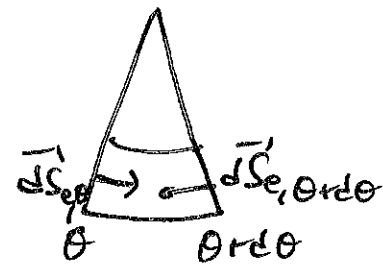
1er Principe:

$$d^2U = [\delta Q_e(\theta, t) + \delta Q_e(\theta+dt, t) - \delta \phi_{tot}] dt$$

$$\delta \phi_{tot} = h(T(\theta, t) - T_e) \times 4 R a d\theta$$

↑ flux sortant

$$\delta Q_e(\theta, t) = \iint \vec{j}_h(r, \theta, t) \cdot d\vec{S}_e \vec{e}_\theta dt$$



$$= \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \vec{j}_h(r, \theta, t) \cdot \vec{e}_\theta a dr dt$$

$$= - \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_\theta a dr dt$$

$$\delta Q_e(\theta, t) = - \lambda a \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_\theta \left[\frac{dr}{r} \right]_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} = - \lambda a \frac{\partial T}{\partial \theta} \ln \left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}} \right)$$

$$\delta Q_e(\theta, t) = - \lambda a \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_\theta \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2} \frac{a}{R}}{1 - \frac{1}{2} \frac{a}{R}} \right) dt$$

$$\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$$

$$\delta Q_e(\theta, t) = - \lambda a \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_\theta \left[\frac{1}{2} \frac{a}{R} + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \right] dt$$

$$\delta Q_e(\theta, t) = - \frac{\lambda a^2}{R} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_\theta dt$$

De même en $\theta + d\theta$

$$\delta Q_e(\theta + d\theta, t) = \iint \vec{j}_R(r, \theta, t) \cdot d\vec{S}_{e, \theta + d\theta} dt$$

$$\delta Q_e(\theta + d\theta, t) = + \frac{\lambda a^2}{R} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_{\theta + d\theta} dt$$

$$d^2U = \frac{\lambda a^2}{R} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_{\theta + d\theta} - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_{\theta} \right] dt - 4Rah(T(\theta, t) - \bar{T}_e) / d\theta dt \cdot \left(\frac{\partial \vec{j}_R(r, \theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta = \pi} = 0$$

DL, (

$$d^2U = \frac{\lambda a^2}{R} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) d\theta dt - 4Rah(T(\theta, t) - \bar{T}_e) / d\theta dt$$

D'où $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt dV = \frac{\lambda a^2}{R} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) d\theta dt - 4Rah(T(\theta, t) - \bar{T}_e) / d\theta dt$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \times a^2 R d\theta = \frac{\lambda a^2}{R} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) d\theta - 4Rah(T(\theta, t) - \bar{T}_e) / d\theta$$

$$\boxed{\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\lambda}{R^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) - \frac{4h}{a} (T(\theta, t) - \bar{T}_e)}$$

(13) En RP, $\frac{1}{R^2} \frac{d^2 T}{d\theta^2} - \frac{1}{\delta^2} \times T(\theta) = -\frac{1}{\delta^2} \bar{T}_e$

Soit $\frac{d^2 T}{d\theta^2} - \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 T(\theta) = -\left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \bar{T}_e$

$$\boxed{T(\theta) = A e^{-\frac{R\theta}{\delta}} + B e^{+\frac{R\theta}{\delta}} + \bar{T}_e}$$

$$\underline{[S]} = L \quad \text{car} \quad \left[\frac{R\theta}{\delta} \right] = 1$$

(14). $T(\theta=0) - \bar{T}_e = [A + B = T_1 + \bar{T}_e]$

$$\left(\frac{\partial \vec{j}_R(r, \theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta = \pi} = 0$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{dT}{d\theta} \right)_{\theta = \pi} = 0$$

$$-AR e^{-\frac{R\pi}{\delta}} + BR e^{+\frac{R\pi}{\delta}} = 0$$

$$B e^{\frac{R\pi}{\delta}} = A e^{-\frac{R\pi}{\delta}}$$

$$\boxed{A = B e^{\frac{2R\pi}{\delta}}}$$

D'où $B \left[e^{\frac{2R\pi}{\delta}} + 1 \right] = T_1 + \bar{T}_e$

$$\boxed{B = \frac{T_1 + \bar{T}_e}{1 + e^{\frac{2R\pi}{\delta}}} \quad \text{et} \quad A = \frac{T_1 + \bar{T}_e}{e^{\frac{2R\pi}{\delta}} + 1}}$$

$$\boxed{T(\theta) = \left(\frac{T_1 - \bar{T}_e}{1 + e^{-\frac{2R\pi}{\delta}}} \right) e^{-\frac{R\theta}{\delta}} + \left(\frac{T_1 - \bar{T}_e}{1 + e^{\frac{2R\pi}{\delta}}} \right) e^{+\frac{R\theta}{\delta}} + \bar{T}_e \quad (5)}$$

15) Le phénomène de diffusion a pu se développer de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ en un temps caractéristique τ tel que

$$L = \sqrt{D\tau} = \pi R \Rightarrow \tau = \frac{\pi^2 R^2}{D}$$

$$\tau = \frac{\pi^2 \times (16 \cdot 10^{-2})^2 \times 7,9 \cdot 10^3}{80 \times 4 \cdot 10^2}$$

$$\tau = 10^4 \text{ s} = 166 \text{ min} = \underline{2,8 \text{ h}}$$

On obtient bien une précision du même ord.

16) Pas de fuite thermique \Rightarrow pas de transfert conducto-convectif

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{R^2 \partial \theta^2} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} \quad T_n(\theta, t) = f_n(\theta) g_n(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = g_n'(t) f_n(\theta) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = f_n''(\theta) g_n(t)$$

$$\frac{\lambda}{R^2} f_n''(\theta) g_n(t) = \mu c g_n'(t) f_n(\theta)$$

$$\begin{aligned} &\div g_n(t) f_n(\theta) \\ &\frac{\lambda}{R^2} \frac{f_n''(\theta)}{f_n(\theta)} = \mu c \frac{g_n'(t)}{g_n(t)} \end{aligned}$$

Equation de la forme: $F(\theta) = G(t)$ et valable $\forall \theta \in]-\pi; \pi[$ et $\forall t > 0$

$$\text{Donc } \frac{\lambda}{\mu c R^2} \frac{f_n''(\theta)}{f_n(\theta)} = \frac{g_n'(t)}{g_n(t)} = K \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \frac{1}{g_n(t)} \frac{d g_n(t)}{dt} = K \Leftrightarrow \frac{d g_n(t)}{dt} - K g_n(t) = 0$$

Solution de la forme e^{Kt}

$$g_n(t) = g_n(0) e^{Kt}$$

K est nécessairement négatif sinon

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(\theta, t) = +\infty$$

$$\text{On pose } \frac{1}{\tau_n} = -K \Rightarrow g_n(t) = g_n(0) e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

$$\bullet f_n''(\theta) = -\frac{\mu c R^2}{\lambda} f_n(\theta) \Leftrightarrow f_n''(\theta) + \frac{R^2}{d_n^2} f_n(\theta) = 0$$

$$\text{avec } d_n^2 = \frac{\lambda \tau_n}{\mu c}$$

$$f_n(\theta) = A_n \sin\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) + B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right)$$

Or $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$. donc f_n fct paire

$$\text{Donc } A_n = 0$$

(6)

$$f_n(\theta) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right)$$

$$\hookrightarrow T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

avec $d_n = \sqrt{\frac{\lambda \tau_n}{\mu c}}$ $[\tau_n] = T$
 $[d_n] = L$

①⑦ $T_m =$ température moyenne de l'anneau.

$T_n(\theta, t)$ est solution de l'équation de la chaleur. Or l'équation de la chaleur est linéaire. Donc toute combinaison linéaire de solutions est solution.

$\hookrightarrow T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(\theta, t)$ est donc solution de l'EDP.

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(n\theta) = T_n(\theta, t=0)$$

$$= T_m + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) \times 1$$

On identifie: $B_n = b_n$ $n = \frac{R}{d_n}$

D'où $\tau_n = \frac{\mu c d_n^2}{\lambda} = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}$

$$\textcircled{18} T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(n\theta) e^{-t/\tau_n}$$

$$T(\theta, t) - T_m = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} \cos(n\theta)$$

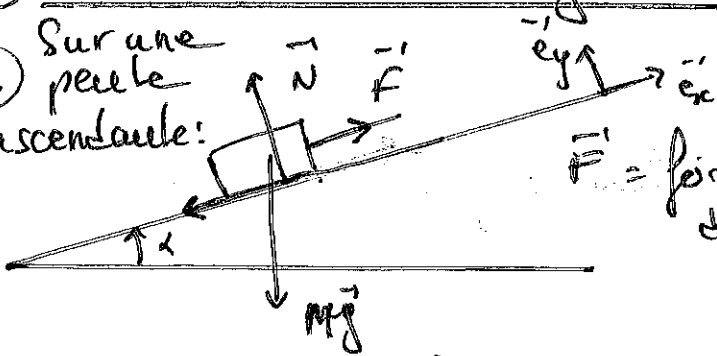
Chaque mode s'atténue en tps caractéristique τ_n proportionnel à $\frac{1}{n^2} \rightarrow$ Au bout d'un certain tps, seul le mode fondamental est observé car c'est celui dont l'amplitude décroît le moins vite.

La glace sur la banquise

(Niles NP 2019)

I Un traicreac sur la glace

1 Sur une puelle ascendante:



\vec{F} = force de traction des chiens
 $\vec{F} = F \vec{e}_x$

PFD sur le dispositif: $m \frac{dv}{dx} \vec{e}_x = \vec{N} \vec{e}_y + \vec{T} \vec{e}_x + \vec{Mg} + \vec{F}$

$$\begin{cases} M \ddot{x} = \vec{T} - Mg \sin \alpha + F & \text{loi de Coulomb pour le} \\ 0 = \vec{N} - Mg \cos \alpha & \text{glissement, } \|\vec{T}\| = \mu_s \|\vec{N}\| \\ & \text{et } \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \end{cases}$$

$\vec{N} = Mg \cos \alpha \Rightarrow \vec{T} = \mu_s Mg \cos \alpha$

$M \ddot{x} = -\mu_s Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha + F$

$$\ddot{x} = -(\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha)g + \frac{F}{m}$$

Sur une piste horizontale ($\alpha = 0$)

$\ddot{x} = -\mu_s g + \frac{F}{m} \Rightarrow$ On pose $\mu_s' = \mu_s \cos \alpha + \sin \alpha$

Ainsi $\ddot{x} = -\mu_s' g + \frac{F}{m}$

2 En statique, $\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$

A la limite de glissement $\|\vec{T}\| = \mu_s \|\vec{N}\|$
 ie $F_{0, \min} = \mu_s Mg$

$$\underline{MU}: F_{0, \min} = 8 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^4 \times 9,8$$

$$F_{0, \min} = 392 \text{ N}$$

3 $\frac{dv}{dt} = -\mu_s g + \frac{F_0}{m} - \frac{\beta}{m} v$

$\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v = \frac{F_0}{m} - \mu_s g$ on pose $\tau = \frac{m}{\beta}$

$v(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{F_0}{\beta} - \frac{\mu_s g m}{\beta}$

CI: $v(t=0) = 0 \Rightarrow A + \frac{F_0 - \mu_s m g}{\beta} = 0$

$$v(t) = \frac{F_0 - \mu_s m g}{\beta} \left[1 - e^{-t/\tau} \right]$$

A $t = t_1$, $v(t_1) = 0,95 v_0$

$0,95 v_0 = v_0 \left[1 - e^{-t_1/\tau} \right]$

$$1 - 0,95 = e^{-t_1/\tau}$$

$$\ln 0,05 = -\frac{t_1}{\tau}$$

$$\tau = \frac{-t_1}{\ln 0,05} = \frac{M}{\beta}$$

$$\beta = \frac{M \ln 0,05}{t_1}$$

$$\text{AN: } \beta = \frac{5 \cdot 10^2 \times \ln 0,05}{5}$$

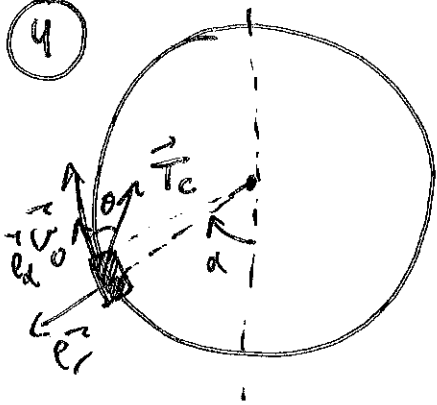
$$\beta = 3 \cdot 10^2 \text{ kg/s}^5$$

$$v_0 = \frac{F_0 - \mu_d \Pi g}{\beta} \Leftrightarrow F_0 = \beta v_0 + \mu_d \Pi g$$

$$\text{AN: } F_0 = 3 \cdot 10^2 \times 3 + 5 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^2 \times 9,8$$

$$F_0 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ N}$$

4



$$\Pi \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\Pi \vec{g}}_{\text{le traineau}} + \vec{N} + \vec{T}_c + \vec{T}$$

$$\text{NCU: } \vec{a} = -\frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r \text{ dans Rt galiléen}$$

$$-\frac{\Pi v_0^2}{R} \vec{e}_r = T_c (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_r) - \mu_d \Pi g \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_r \int -\frac{\Pi v_0^2}{R} = -T_c \sin \theta$$

$$\vec{e}_x \left. \begin{aligned} 0 &= T_c \cos \theta - \mu_d \Pi g \Leftrightarrow T_c = \frac{\mu_d \Pi g}{\cos \theta} \\ -\frac{\Pi v_0^2}{R} &= -\mu_d \Pi g \tan \theta \end{aligned} \right\} \vec{T}_c = \frac{\Pi v_0^2}{R} \vec{e}_r + \mu_d \Pi g \vec{e}_x$$

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_d R g}$$

II Croissance hivernale de l'épaisseur de glace

$$\text{5 } \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\lambda}{\rho c} \times \frac{1}{(\Delta z)^2} = \frac{1}{\Delta t}$$

On peut considérer que le régime permanent est atteint si $\Delta z \gg z_0$

$$\text{ie } \frac{\lambda}{\rho c z_0^2} \gg \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t \gg \frac{\rho c z_0^2}{\lambda}$$

"assez lente" = $\Delta z_0 \ll \lambda$ sur Δt ??

$$\text{6 } R_g = \frac{T_0 - T_s}{\phi_g S \lambda g}$$

$$R_e = \frac{T_1 - T_0}{\phi_e S \lambda e}$$

9

(Rg: On peut également se placer dans le ref du traineau non galiléen.)

$$R_c = \frac{T_s - T_2}{SP_u} = \frac{1}{Sh}$$

8. Les 3 résistances sont bien en série car l'énergie thermique traverse successivement l'eau, la glace et l'interface glace/air.

• L'énergie thermique apportée au circuit et modélisée par le générateur de courant est liée à l'énergie libérée lors de la solidification de la glace.

$$\Phi = \rho_g S l_f \frac{d\delta_g}{dt}$$

$$\Phi = -\frac{dH_{sol}}{dt} = +\frac{\delta m l_f}{dt} = \frac{\rho_g S d\delta_g l_f}{dt}$$

D'après l'énoncé on suppose que $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{\delta_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$

$$\text{Donc } \rho_g l_f \frac{d\delta_g}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{\delta_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}}$$

$$\int_0^{\delta_g} \left(\frac{\delta_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h} \right) d\delta_g = \int \frac{T_0 - T_2}{\rho_g l_f} dt$$

$$\left[\frac{\delta_g^2}{2\lambda_g} + \frac{\delta_g}{h} \right]_0^{\delta_g} = \frac{T_0 - T_2}{\rho_g l_f} t$$

$$\frac{\delta_g^2}{2\lambda_g} + \frac{\delta_g}{h} = \frac{T_0 - T_2}{\rho_g l_f} t$$

↳ Analyse dimensionnelle en supposant

$$[\tau_g] = \tau \text{ et } [l_g] = L$$

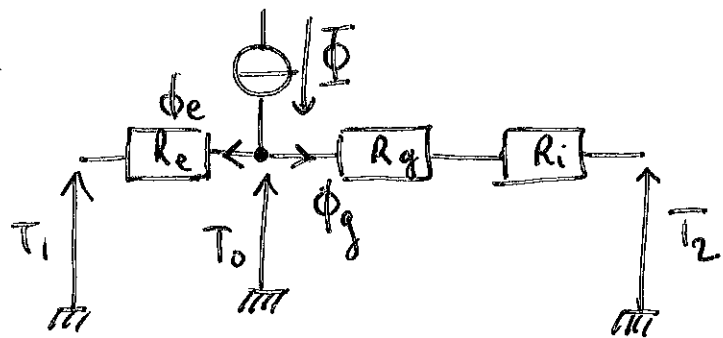
↳ après quelques efforts, on aboutit à

$$\tau_g = \frac{2\lambda_g l_f \rho_g}{(T_0 - T_2) h^2} \text{ et } l_g = \frac{2\lambda_g}{h}$$

$$\rho_g S l_f \frac{d\delta_g}{dt} = \frac{T_1 - T_0}{\frac{e}{\lambda_e S}} + \frac{T_0 - T_2}{\frac{\delta_g}{\lambda_g S} + \frac{1}{Sh}}$$

$$\hookrightarrow \rho_g^2 t = \tau_g (\delta_g^2 + l_g \delta_g) \quad (10)$$

9. On utilise le modèle électrique:



$$LDN \quad \Phi = \Phi_e + \Phi_g$$

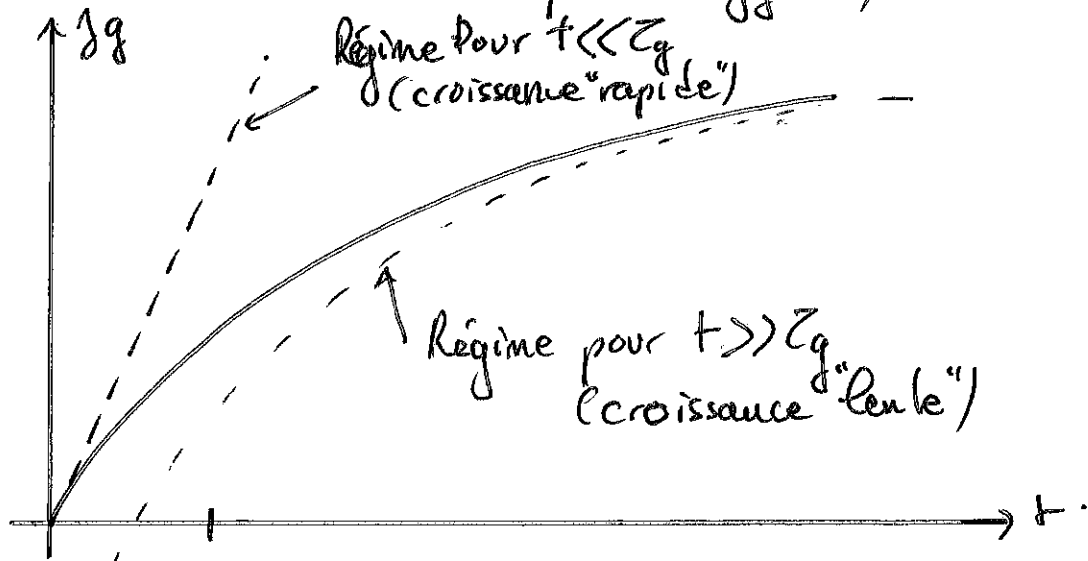
$$\Phi = \frac{T_1 - T_0}{R_e} + \frac{T_0 - T_2}{R_g + R_i}$$

$$\textcircled{10} \quad g^2 + l_g g - \frac{l_g^2}{\tau_g} t = 0$$

$$\Delta = l_g^2 + 4 \frac{l_g^2}{\tau_g} t \quad (\Delta > 0 \forall t > 0)$$

$$g = \frac{1}{2} \left(-l_g \pm \sqrt{l_g^2 + 4 \frac{l_g^2}{\tau_g} t} \right)$$

(1 seule racine correspond à $g > 0$)



Les régimes: pour $t \ll \tau_g \quad g = \frac{l_g t}{\tau_g} \quad (DL_1)$

$t \gg \tau_g \quad g = l_g \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{\tau_g}} \right)$