



Durée 4h - L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'épreuve se compose de 2 problèmes totalement indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. La présentation de schémas clairs, légendés et soignés est également attendue pour expliciter les choix d'orientations ou introduire des grandeurs physiques.

Dans toute l'épreuve, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les principaux résultats seront encadrés.

Première partie

Fourier dans tous ses états

Ce problème traite de quelques applications de l'analyse de Fourier à la physique. Il comporte 2 parties indépendantes. La première partie est consacrée à l'étude de l'échantillonnage d'un signal électronique. La deuxième partie présente l'expérience originelle de Joseph Fourier de l'étude des phénomènes de diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique. C'est notamment cette expérience qui lui a permis d'introduire pour la première fois la décomposition d'une fonction périodique en séries dites « de Fourier ».

Données numériques

- Capacité thermique massique du fer : $c = 4,0 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Masse volumique du fer : $\mu_f = 7,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Conductivité thermique du fer : $\lambda = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Coefficient conducto-convectif à l'interface fer-air : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

1 Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$.

1. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous.

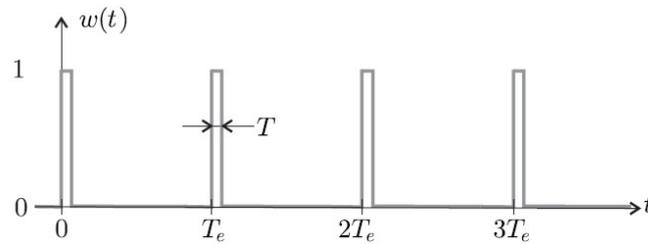


FIGURE 1 – Signal d'échantillonnage

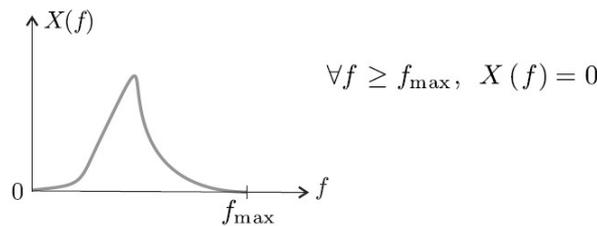
On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = \frac{1}{T_e}$.

- Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \frac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t)$$

- Représenter, par analogie avec la question 1, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \frac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de $k \in \{1, 2\}$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.
- Proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».
- On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale f_{\max} . Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{\max} et f_e .

FIGURE 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

- Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon- Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.
- La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $\Delta t = 75$ min. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44,1$ kHz et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

2 Analyse de Fourier et diffusion thermique

On considère un matériau homogène de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , de masse volumique μ assimilable à une répartition unidimensionnelle de matière selon un axe (Ox) .

8. Effectuer un bilan d'énergie sur un système mésoscopique de largeur dx et de section S . En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x, t)$ à l'abscisse x et au temps t dans le matériau dans le cas d'un phénomène de diffusion thermique unidimensionnel et sans perte.
9. En déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ sur une longueur L . Faire l'application numérique pour une diffusion dans le fer sur une longueur $L = 50$ cm.

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16$ cm et de section carrée de côté $a \ll R$. L'anneau est chauffé en un point pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ .

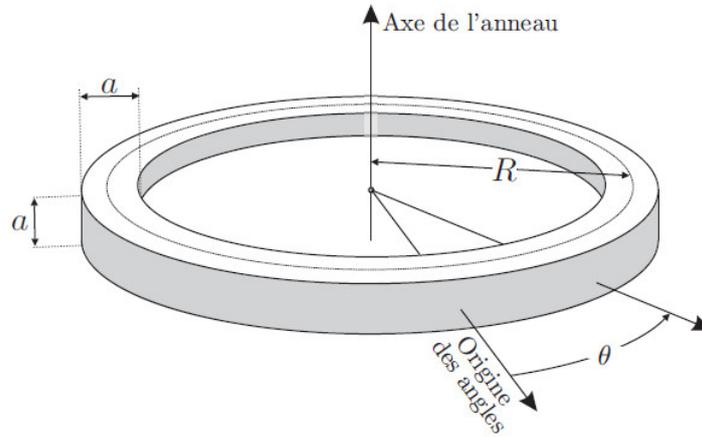


FIGURE 3 – Géométrie du problème étudié par Fourier : le tore à section carrée.

On notera $T(\theta, t)$ la température de l'anneau, supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi; \pi[$ et on admettra que, par symétrie, $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$.

Le flux thermique conducto-convectif $\delta\phi$ sortant à travers une surface dS de l'anneau de fer vers l'air environnant (de température T_e constante) est modélisé par la loi de Newton

$$\delta\phi = h(T(\theta, t) - T_e)dS,$$

dans laquelle le coefficient d'échange thermique h est supposé constant.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

10. Rappeler la loi de Fourier pour la diffusion thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} puis dessiner l'allure des lignes de champ le long de l'anneau, en précisant leur orientation.

Pour établir l'équation décrivant l'évolution de la fonction $T(\theta, t)$ dans l'anneau, on considère le volume élémentaire dV compris entre deux sections de surface a^2 de l'anneau, repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$.

11. Déterminer les expressions de dV ainsi défini et de la surface élémentaire dS_{lat} de son contact avec l'air. On rappelle que $a \ll R$.
12. Montrer que $T(\theta, t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a} (T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$$

13. Donner, en régime stationnaire, et en fonction de T_e , R , θ et de $\delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$, la forme de la solution $T(\theta)$. On introduira deux constantes d'intégration A et B sans chercher à les déterminer pour l'instant. Préciser, en le justifiant, la dimension de la grandeur δ .
14. On donne sur la figure 4 l'allure de la représentation graphique associée aux solutions $T(\theta)$ et $j_{th}(\theta)$ (pour r fixé). On note $T_1 = T(\theta = 0)$ la valeur, imposée par le chauffage, en $\theta = 0$. Exploiter judicieusement ces deux graphes pour déterminer, sur l'intervalle $[0, +\pi]$, les constantes A et B introduites précédemment, en fonction de T_1 , T_e , R et δ . En déduire la solution $T(\theta)$ sur l'intervalle $[0, +\pi]$.

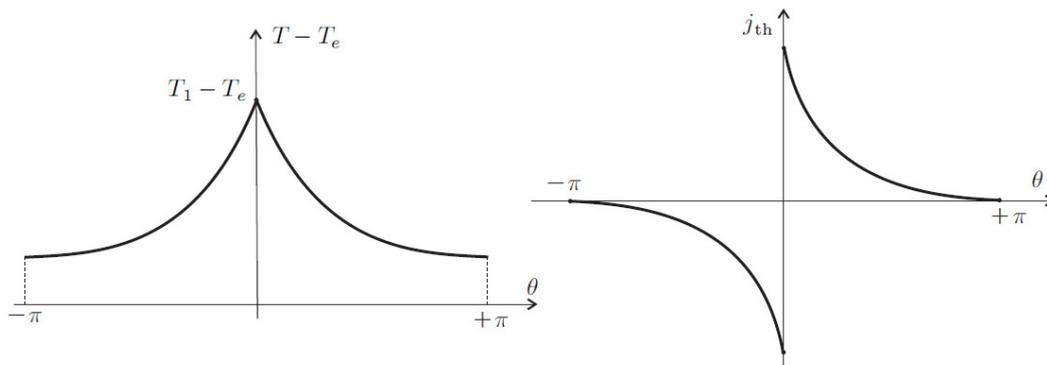


FIGURE 4 – Graphe des solutions : Différence de température à gauche, flux thermique surfacique à droite.

Sur les relevés expérimentaux de Joseph Fourier du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs de températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires.

15. Montrer que cet ordre de grandeur était prévisible à condition de supposer le phénomène de diffusion prépondérant en régime transitoire.

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites « séries de Fourier ». L'anneau est chauffé comme précédemment en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température reste de la forme $T(\theta, t)$. On s'intéresse toujours au domaine $\theta \in]-\pi; \pi[$, avec $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$ par symétrie.

16. Donner l'équation vérifiée par $T(\theta, t)$. On cherche les solutions à variable séparée de la forme $T_n(\theta, t) = f_n(\theta)g_n(t)$. L'interprétation de l'indice n apparaîtra dans la donnée de la condition initiale nécessaire à la résolution complète de l'équation. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta, t)$ s'écrit sous la forme

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n}$$

On donnera la relation entre τ_n et d_n et on précisera leurs dimensions respectives.

17. À l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et dont le développement en série de Fourier est de la forme :

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(n\theta)$$

Les coefficients b_n sont supposés connus. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta, t)$ peut se mettre sous la forme

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(\theta, t)$$

Expliciter B_n , d_n et τ_n en fonction de b_n , n , R , μ , c et λ .

18. Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta, t) - T_m$ devient rapidement proportionnel à $\cos(\theta)$. Commenter cette constatation.



Deuxième partie

La glace de la banquise

L'existence de zones couvertes de glace de grande épaisseur au-dessus des océans polaires est bien sûr une caractéristique remarquable des régions polaires. On étudie ici deux propriétés de ces étendues de glace :

- quelques propriétés mécaniques d'un traîneau glissant sur sa surface ;
- un modèle simple de croissance de l'épaisseur de la glace en hiver.

1 Un traîneau sur la glace

Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale M . Cette masse comprend le pilote (ou musher) et le traîneau, formant un système considéré comme un solide indéformable qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique (avant le démarrage) μ_s et dynamique (en mouvement) μ_d .

1. Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale. Montrer que, dans ce dernier cas, tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer μ_d par μ'_d , que l'on exprimera.

L'intensité de la force de traction totale F exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse v et on adoptera le modèle $F = F_0 - \beta v$ où F_0 et β sont des constantes positives. On prendra les valeurs $M = 5,0 \times 10^2$ kg, $\alpha = 0$, $\mu_d = 5,0 \times 10^{-2}$ et $\mu_s = 8,0 \times 10^{-2}$.

2. Déterminer la valeur minimale de F_0 permettant le démarrage du traîneau.
3. La vitesse du traîneau en régime stationnaire est $v_0 = 3$ m · s⁻¹, atteinte à 5% près au bout d'un temps $t_1 = 5$ s. Exprimer d'une part β en fonction de M et t_1 et d'autre part F_0 en fonction de β , v_0 , μ_d , M et g . Calculer leurs valeurs respectives.

Toujours à vitesse constante v_0 , le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre O et de rayon R (figure 5). Les chiens (modélisés ici en un seul point C) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle.

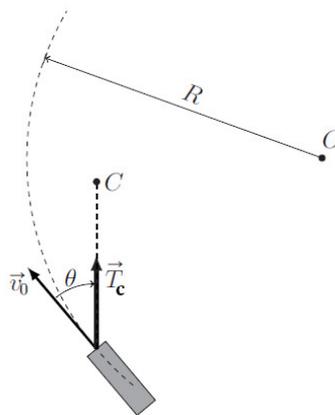


FIGURE 5 – Trajectoire circulaire du traîneau

4. Déterminer en fonction des données la tension \vec{T}_c de la corde et l'angle θ entre la force de traction et la trajectoire.

2 Croissance hivernale de l'épaisseur de glace

Pour étudier la croissance de la couche de glace en hiver, on modélise l'océan sous la banquise en formation de la manière suivante (figure 6) : en profondeur, la température de l'eau est maintenue constante à $T_1 = 4$ °C par les courants océaniques. Sur une hauteur constante e sous la banquise, l'eau se refroidit progressivement jusqu'à atteindre $T_0 = 0$ °C à l'altitude $z = 0$ de formation de la glace (on néglige tout effet de salinité de l'eau). La couche de glace a une épaisseur croissante $z_g(t)$ qu'il s'agit de déterminer ; au-dessus de celle-ci, l'air est à la température constante $T_2 = -40$ °C. On notera λ_e et λ_g les conductivités thermiques et c_e et c_g les capacités thermiques massiques de l'eau liquide et de la glace, ρ_g et ℓ_f la masse volumique et l'enthalpie massique de fusion de la glace ; toutes ces grandeurs sont des constantes.

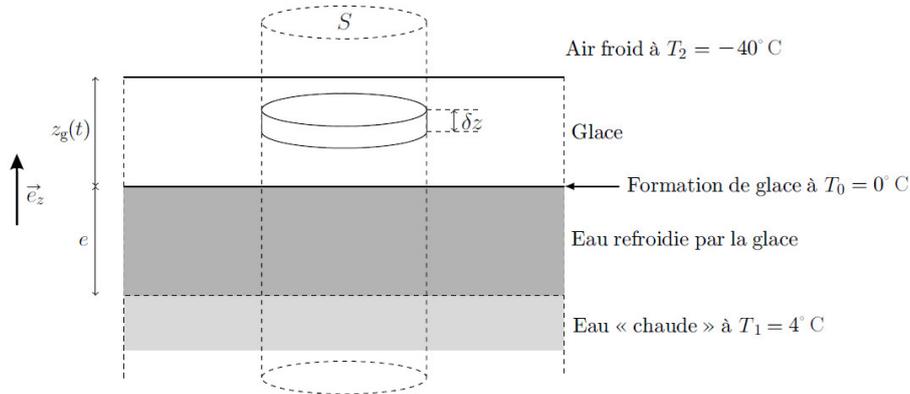


FIGURE 6 – L’océan sous la banquise en formation

L’épaisseur de glace $z_g(t)$ augmente régulièrement du fait de la cristallisation de l’eau refroidie à $T_0 = 0^\circ\text{C}$ à la base de la couche de glace. Toutes les études pourront être faites pour un système défini par un cylindre vertical de surface S unité (cf. figure 6) au sein duquel les transferts thermiques unidimensionnels sont régis par la loi de Fourier.

- Rappeler l’équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_g(z, t)$ au sein de la glace.
Déterminer une expression donnant l’ordre de grandeur de la durée Δt de la diffusion thermique dans la glace sur une hauteur Δz . Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, la température T_g ne dépend pratiquement plus du temps ? Préciser ce qu’on entend par « assez lentes ».

On se place dans ce cas dans toute la suite : dans l’eau comme dans la glace, les répartitions de température seront supposées quasi-statiques.

- Définir et exprimer les résistances thermiques R_g et R_e , pour une aire donnée S , des couches de glace et d’eau refroidie sous la glace.

Les transferts thermiques à travers la surface supérieure de la banquise sont décrits par la loi de Newton des transferts pariétaux (radiatifs et convecto-conductifs) : la puissance échangée par unité d’aire de cette surface vérifie $|P_u| = h|T_s - T_2|$ où T_s est la température au sommet de la couche de glace ; le coefficient $h > 0$ de la loi de Newton est supposé connu et constant.

- Exprimer la résistance thermique R_i , en fonction de h , pour une aire S , de l’interface entre l’air et la glace.
- Justifier que le régime quasi-permanent de croissance de la couche de glace peut être décrit par le schéma électrique équivalent de la figure 6 et préciser l’expression du « courant » ϕ du « générateur de courant » en fonction notamment de ℓ_f , ρ_g et de la vitesse de croissance $v_g = \frac{dz_g}{dt}$ de la couche de glace.

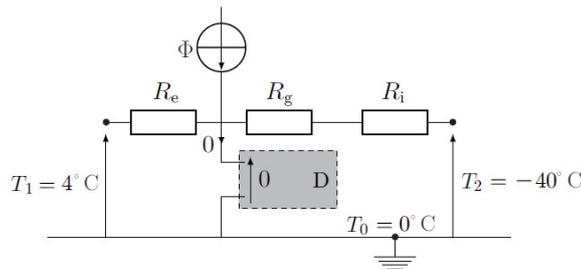


FIGURE 7 – Circuit électrique équivalent à la croissance de la couche de glace. Le dipole D représenté sur cette figure permet d’assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant dans cette branche du circuit.

- Établir l’équation différentielle vérifiée par $z_g(t)$. On suppose que pour toutes les valeurs de t considérées on a $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$.

En déduire la loi d’évolution de l’épaisseur de la couche de glace sous la forme : $\tau_g[\ell_g z_g(t) + z_g^2(t)] = \ell_g^2 t$ où l’exprimera les grandeurs τ_g et ℓ_g en fonction des paramètres du modèle. L’instant $t = 0$ correspond au début de la formation de la banquise.

- Tracer et commenter l’allure de la courbe donnant z_g en fonction de t . On montrera notamment l’existence de deux régimes successifs.