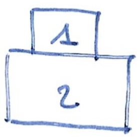
DS 1

Problème 1 : Adhérence ou pas ?
(D'après CCINP MP 2020)

I Lois de Coulomb relatives au glissement

(1)



$\vec{v}_g = \vec{v}_{1/2} - \vec{v}_{2/1}$

Valable $\forall$ le référentiel

(2) • Si $\vec{v}_g = \vec{0}$ (Non glissement)

$\|\vec{T}\| \leqslant f_s \|\vec{N}\|$

• Si $\vec{v}_g \neq 0$ (glissement)

$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$ avec $\begin{cases} \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \\ \vec{T} \wedge \vec{v}_g = 0 \end{cases}$

(3) • adhérence $\to$ glissement $\|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\|$

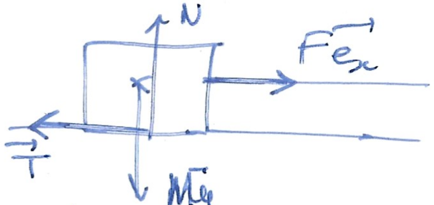
• glissement $\to$ adhérence $\vec{v}_g = \vec{0}$

II Mesure du coefficient de frottement dynamique

(4) Phase 1, fil tendu, mouvement de 1 et 2 uniformément accéléré.

Phase 2 : fil non tendu. Solide 1 en mouvement ralenti. Solide 2 immobile (Dans R_T)

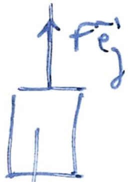
(5) TRD $M\ddot{X}\vec{e_x} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + F\vec{e_x}$ Syst 1



Syst 2 : $\alpha M\ddot{z}\vec{e_y} = \alpha M\vec{g} - F\vec{e_y}$

$\hookrightarrow /\vec{e_y}$ $\alpha M\ddot{z} = +\alpha Mg - F$

$\boxed{F = \alpha M(g - \ddot{z})}$ $(>0$



$/\vec{e_x}$ $M\ddot{X} = -T\vec{e_x} + F$

$/\vec{e_y}$ $0 = Mg + N \Rightarrow N = Mg$

Loi de Coulomb, $T = f_d N = f_d Mg$

Donc $\boxed{M\ddot{X} = -f_d Mg + \alpha M(g - \ddot{z})}$

fil inextensible $\Rightarrow \dot{X} = \dot{z} \Rightarrow \ddot{X} = \ddot{z}$

$\ddot{X} = -f_d g + \alpha g - \alpha \ddot{X} \Leftrightarrow \ddot{X}(1 + \alpha) = g(\alpha - f_d)$

$$\boxed{\ddot{X} = g\left(\frac{\alpha - f_d}{1 + \alpha}\right)}$$

(6) La phase 1 dure jusqu'à ce que le mobile 2 touche le sol $\to X_f = H$.

$$\dot{x}(t) = gt\left(\frac{\alpha - f_d}{1+\alpha}\right)$$

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}gt^2\left(\frac{\alpha - f_d}{1+\alpha}\right)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}g t_1^2\left(\frac{\alpha - f_d}{1+\alpha}\right)$$

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2H_0(1+\alpha)}{g(\alpha - f_d)}}}$$

7) A cette date, $V_1 = g\left(\frac{\alpha - f_d}{1+\alpha}\right)\sqrt{\frac{2H_0(1+\alpha)}{g(\alpha-f_d)}}$

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2gH_0(\alpha - f_d)}{1+\alpha}}}$$

8) Le fil n'est plus tendu

TRD sur le syst 1 : $m\ddot{x} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$

$/\vec{e_3}$ $\quad mg - N = 0 \Rightarrow N = mg$

Loi de Coulomb, $T = f_d mg$

$/\vec{e_x}$ $\quad m\ddot{x} = -f_d mg \Leftrightarrow \ddot{x} = -f_d g$

$$\dot{x} - V_1 = -f_d g(t - t_1) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = V_1 - f_d g(t - t_1)$$

$$\boxed{x(t) = H_0 + V_1(t - t_1) - f_d g\frac{(t-t_1)^2}{2}}$$

9) D distance ~~totale~~ parcourue par le solide 1.

lorsque le solide s'immobilise, $0 = V_1 - f_d g(t_2 - t_1)$

$$t_2 = \frac{V_1}{f_d g} + t_1$$

$$D = H_0 + V_1(t_2 - t_1) - f_d g\frac{(t_2 - t_1)^2}{2}$$

$$D = H_0 + \frac{V_1^2}{f_d g} - \frac{f_d g}{2}\left(\frac{V_1}{f_d g}\right)^2 = H_0 + \frac{V_1^2}{2 f_d g}$$

$$D - H_0 = \frac{\cancel{2}gH_0(\alpha - f_d)}{(1+\alpha)\cancel{2}f_d g} = \frac{H_0(\alpha - f_d)}{(1+\alpha)f_d}$$

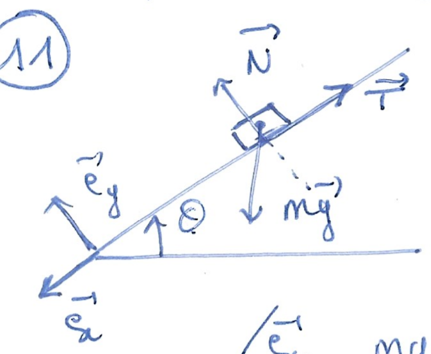
$$(D - H_0)(1-\alpha)f_d = H_0(\alpha - f_d) \Leftrightarrow f_d\left[(D-H_0)(1-\alpha) + H_0\right] = H_0\alpha$$

$$\boxed{f_d = \frac{H_0\alpha}{(D - H_0)(1+\alpha) + H_0}}$$

10) $f_d = \dfrac{40.10^{-2} \times 6/5}{(1{,}5 - 0{,}4)\left(1 + \frac{6}{5}\right) + 0{,}4} = \underline{0{,}17}$

III Mesure du coefficient de frottement statique.

11



A l'éq $0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$

A la limite de mis en mouvement $T = f_s N$

$/\vec{e_y}$ $N = mg\cos\theta$

$/\vec{e_x}$ $mg\sin\theta - T = 0$

$mg\sin\theta_{lim} - f_s mg\cos\theta_{lim} = 0$

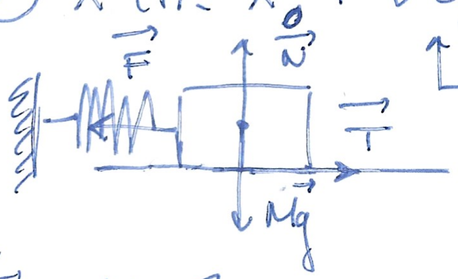
$\boxed{\tan\theta_{lim} = f_s}$

$f_s = \tan 29{,}5° = \underline{0{,}57}$

Rq: Grosse ≠ce de valeurs entre f_s et f_d !

IV Phénomène de "stick-slip"

12 $X(t) = X_0 + Vt$



TRD dans le ref terrestre

$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}$

$-Mg\vec{e_y} + N\vec{e_y} + T\vec{e_x} - kX(t)\vec{e_x}$

$/\vec{e_y}$ $N = Mg$

$/\vec{e_x}$ $T = kX(t)$

Dans le cas limite, juste avant le début du glissement

$T = f_s N = f_s Mg$

D'où, $kX_1 = f_s Mg \Leftrightarrow \boxed{X_1 = \frac{f_s Mg}{k}}$

$\frac{f_s Mg}{k} = X_0 + Vt_1 \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \frac{1}{V}\left(\frac{f_s Mg}{k} - X_0\right)}$

13 Phase 2 : $M\ddot{X}\vec{e_x} = -kX + \underset{\overset{\parallel}{0}}{f_d} Mg$ (d'après texte)

$\ddot{X} + \frac{k}{M}X = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

↳ Mouvement d'un oscillateur harmonique.

14 $E_m = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 = c^{te}$ (pas de force dissipative)

lorsque l'allongement est maximal, $\dot{X} = 0$

$\frac{1}{2}kX_n^2 = \frac{1}{2}kX_1^2 + \frac{1}{2}MV^2$

$X_n^2 = X_1^2 + \frac{M}{k}V^2 = X_1^2 + \left(\frac{V}{\omega_0}\right)^2$

$$\boxed{X_n = \sqrt{X_1^2 + \left(\frac{V}{\omega_0}\right)^2}}$$

15 $X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$\dot{X}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\sin(\omega_0 t)$

CI : A $t = t_1$ $X = X_1$ et $\dot{X} = V$

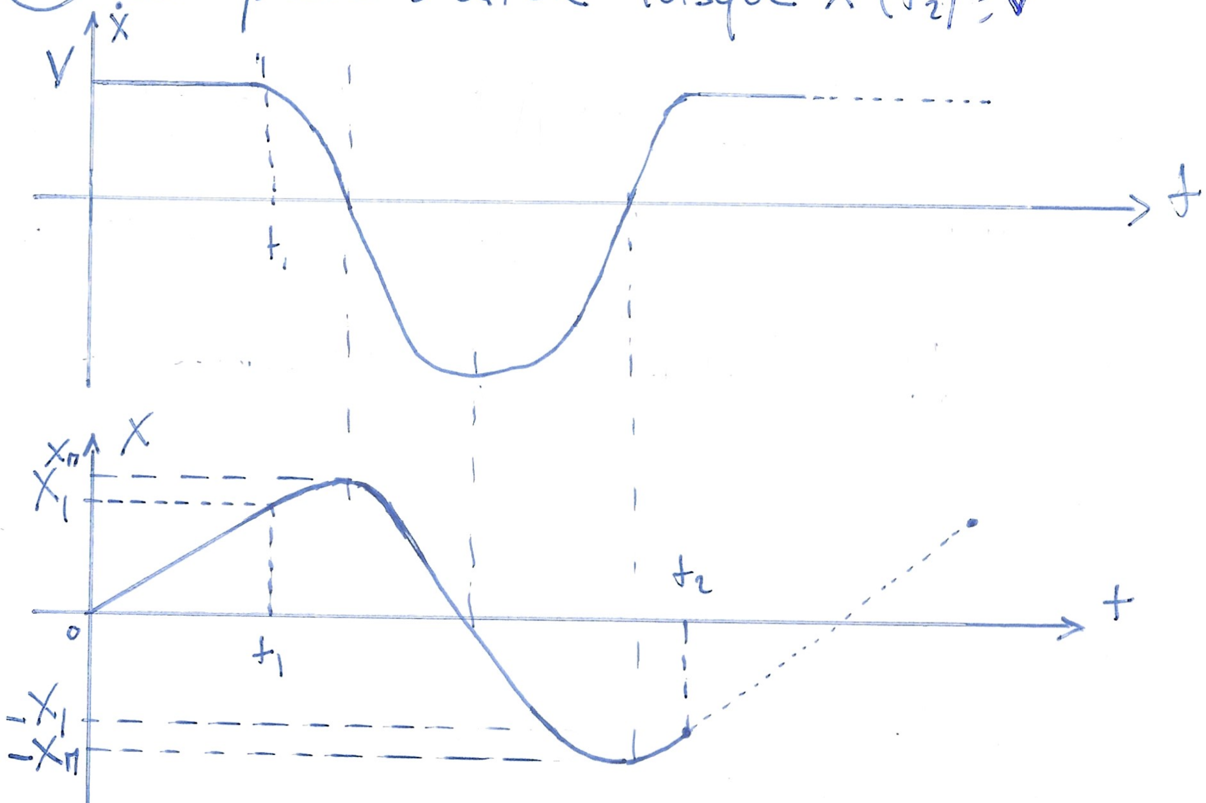
$$\begin{cases} X(t-t_1) = A'\cos[\omega_0(t-t_1)] + B'\sin[\omega_0(t-t_1)] \\ \dot{X}(t-t_1) = -A'\omega_0\sin[\omega_0(t-t_1)] + B'\omega_0\cos[\omega_0(t-t_1)] \end{cases}$$

$X_1 = A'$ et $V = B'\omega_0$

$$\hookrightarrow \boxed{X(t-t_1) = X_1\cos[\omega_0(t-t_1)] + \frac{V}{\omega_0}\sin[\omega_0(t-t_1)]}$$

$$\boxed{\dot{X}(t-t_1) = -X_1\omega_0\sin[\omega_0(t-t_1)] + V\cos[\omega_0(t-t_1)]}$$

16) Cette phase s'arrête lorsque $\dot{X}(t_2) = V$



17) $X(t_1) \simeq X_n \Rightarrow \frac{V}{\omega_0} \ll X_1$

$$\boxed{\frac{X_1}{V} \gg \frac{\tau_0}{2\pi}}$$

18) Durée de la phase de glissement

$t_2 - t_1 = \frac{\tau_0}{2}$ (on va de $+X_n$ à $-X_n$)

Durée de la phase de non glissement (on va de $-X_n$ à X_n)

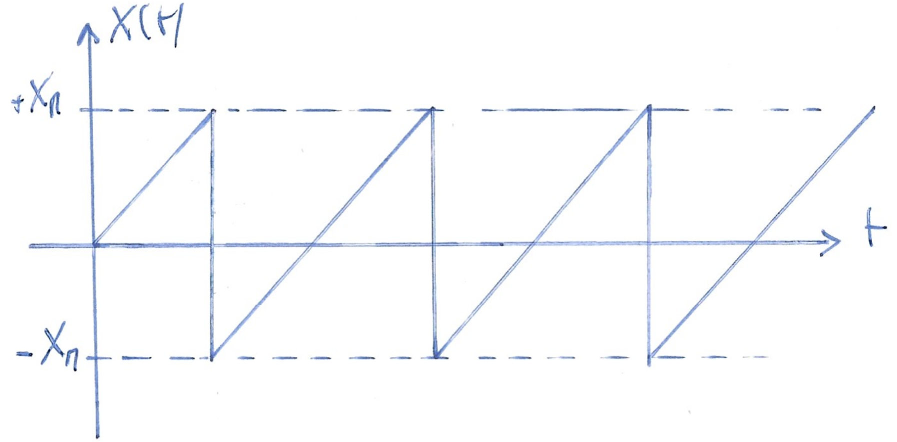
$\Delta t = \frac{2X_n}{V}$

Durée totale $T = \frac{\tau_0}{2} + \frac{2X_n}{V} \simeq \frac{2X_n}{V}$

$T \simeq \frac{2f_s g}{\omega_0^2 V} \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{\omega_0^2 V}{2g f_s}}$

$$\nu = \frac{4.10^3 \times 6.10^{-2}}{2\times 50.10^{-3} \times 9{,}81 \times 0{,}6} = \underline{407\ Hz}$$

19) Dans l'hypothèse $\frac{X_1}{V} \gg \tau_0$ la durée de la phase de glissement est négligeable devant la durée de la phase d'adhérence.



(20) On entend un crissement aigu (audible.
En cassant la craie la fréquence augmente
↳ Ultrasons.

(21) Phase d'adhérence, $\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v_g} = 0$
(car $v_g = 0$)

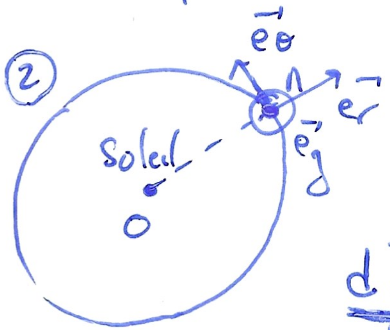
Phase de glissement $\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v_g} = 0$
(car $f_d = 0$)

Problème 2 : Nasa's Mars exploration program
(D'après CCS PC 2022)

I ① $\vec{F} = G \dfrac{m_A m_B}{r^2} \vec{u} \Rightarrow [G] = \dfrac{[F][r^2]}{[m]^2}$

$[G] = MLT^{-2} \times L^2 \times M^{-2} = \underline{L^3 M^{-1} T^{-2}}$

G s'exprime en $\underline{m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}}$

② 

TMC sur la planète p/r au point O

$\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

force centrale

Donc $\underline{\vec{L_O} = \vec{cte}}$

③ $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$, le plan formé par $(\vec{OM}, \vec{v})$ est un plan dont la normale est de direction constante. Donc ce plan est inchangé au cours du tps → <u>Mouvement plan.</u>

$\vec{L_O} = mr\vec{e_r} \wedge (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{L_O}{m}}$

C est la <u>constante des aires.</u>

④ <u>PFD</u> : $\cancel{m}\dfrac{d\vec{V}}{dt} = -\dfrac{\cancel{m} M_S G}{r^2}\vec{e_r}$

Mouvement circulaire $\vec{V} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\dfrac{d\vec{V}}{dt} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

$/\vec{e_r}$: $-r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{M_S G}{r^2}$

$/\vec{e_\theta}$: $r\ddot{\theta} = 0$ → Mouvement circulaire <u>Uniforme</u>

↳ pour un MCU $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = -\dfrac{V^2}{r}\vec{e_r}$

$-\dfrac{V^2}{r}\vec{e_r} = -\dfrac{M_S G}{r^2}\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\dfrac{G M_S}{r}}}$

$V_T = \sqrt{\dfrac{6,67.10^{-11} \times 2.10^{30}}{150.10^9}} = \underline{29,8\ km/s}$

$V_M = \sqrt{\dfrac{6,67.10^{-11} \times 2.10^{30}}{228.10^9}} = \underline{24,2\ km/s}$

II ⑤ $\boxed{\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2} m V^2 = \dfrac{G M_S m}{2r}}$

$\mathcal{E}_p = -\dfrac{G M_S m}{\ }$

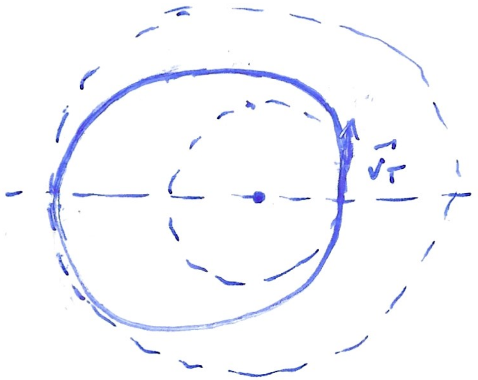
Donc $\boxed{\mathcal{E}_m = -\dfrac{G M_s m}{2r} = -\mathcal{E}_c}$

(6) $\boxed{\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{G M_s} \quad \text{3e loi de Kepler}}$

(7) Pour une orbite elliptique

$\boxed{\mathcal{E}_m = -\dfrac{G M_s m}{2a}}$ et $\boxed{\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G M_s}}$

III (8)



(9) $\dfrac{1}{2} m V_T'^2 - \dfrac{G M_s m}{a_T} = -\dfrac{G M_s m}{2a}$

Or $V_T^2 = \dfrac{G M_s}{a_T} \Rightarrow \dfrac{1}{2} m V_T'^2 - m V_T^2 = -\dfrac{G M_s m}{a_T + a_M}$

$\boxed{V_T' = \sqrt{2V_T^2 - \dfrac{2 G M_s}{a_T + a_M}} = V_T \sqrt{2\left(1 - \dfrac{a_T}{a_M + a_T}\right)}}$

$\boxed{\Delta V_T = V_T\left(\sqrt{2\left(1 - \dfrac{a_T}{a_M + a_T}\right)} - 1\right)}$

$\Delta V_T = \left(\sqrt{2\left(1 - \dfrac{150}{150 + 228}\right)} - 1\right) \times 29{,}8 \cdot 10^3$

$\underline{\Delta V_T = 2{,}93 \text{ km/s}}$

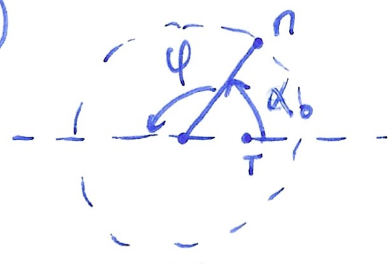
(10) Sur l'orbite elliptique, $\dfrac{2^3 T^2}{(a_T + a_M)^3} = \dfrac{4\pi^2}{G M_s}$

$\boxed{\Delta t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4\pi^2 (a_T + a_M)^3}{2^3 G M_s}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2 (a_T + a_M)^3}{8 G M_s}}}$

$\Delta t = \sqrt{\dfrac{\pi^2 \times \left((228 + 150) \cdot 10^9\right)^3}{8 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 2 \cdot 10^{30}}} = 2{,}23 \cdot 10^7 \text{ s}$

Soit $\underline{\Delta t = 258{,}7 \text{ jours}}$

(11)



$\Delta t = 0$

Durant Δt, Mars parcourt une portion d'angle φ de sa trajectoire.

Si on suppose l'orbite de Mars circulaire, $T_M \rightarrow 2\pi$

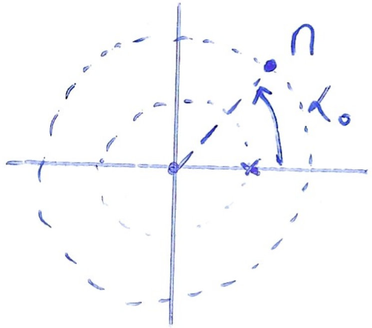
$\Delta t \rightarrow \varphi$

$\varphi = \dfrac{\Delta t \times 2\pi}{T_M}$

Donc $\boxed{\alpha_0 = \pi - \varphi = \pi - 2\pi \frac{\Delta t}{T_M}}$

$\alpha_0 = \pi \left(1 - 2 \times \frac{259}{687}\right) = 0,77 \text{ rad}$

$\underline{\alpha_0 = 44,3°}$

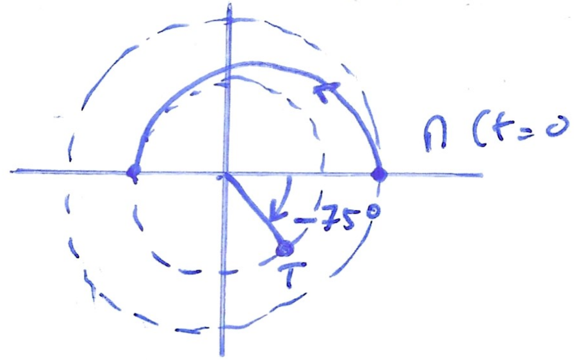


⑫ $T' = 2\Delta t = 258,7 \times 2 = 517,4$ jours

$\theta_T = \frac{2\pi T'}{T_T} = \frac{2\pi \times 517,4}{365} = 8,9 \text{ rad}$

$\theta_T = 510°$ → la Terre a fait un tour complet de son orbite + 150°

IV ⑬ Durant le transfert de Mars à la Terre il s'écoule une durée $\Delta t = 258,7$ jours



$\theta'_T = 2\pi \frac{\Delta t}{T_T} = 4,45 \text{ rad} = 255°$

$\underline{\alpha_1 = 75°}$

⑭ $\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{2\pi t}{T_M} - \frac{2\pi t}{T_T}$

A la fin de la mission sur Mars, $\alpha(t_1) = \alpha_1 \; [2\pi]$

$n \in \mathbb{Z}$

$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{2\pi t_1}{T_M} - \frac{2\pi t_1}{T_T} - 2n\pi$

$2\pi t_1 \left(\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_T}\right) = \alpha_1 - \alpha_0 + 2n\pi$

$t_1 = \frac{\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\pi} + n}{\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_T}} \Rightarrow \boxed{t_1 = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\pi} + n\right) \frac{T_T T_M}{T_T - T_M}}$

On cherche la plus petite valeur positive de t_1

pour $n > -1 \Rightarrow t_1 < 0$

pour $n = -1$ $\quad t_1 = 712$ jours

Durée totale de la mission $t_1 + \Delta t = \underline{971 \text{ jours}}$

durée du voyage retour

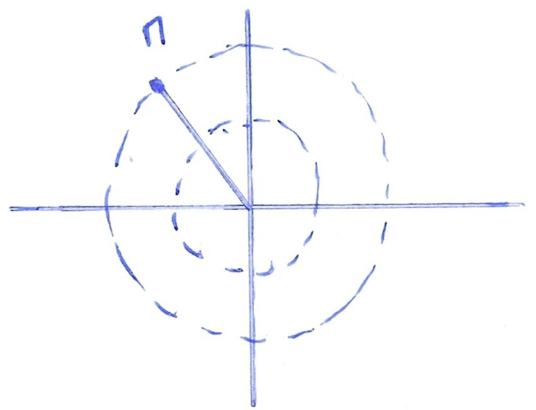
Durée de la mission sur Mars $t_1 - \Delta t = \underline{453 \text{ jours}}$

durée du voyage aller

Durée entre 2 fenêtre de départ $(n = -2 \rightarrow n = -1)$

$$\Delta t_{attente} = \frac{T_T T_n}{T_T - T_n} = \underline{779 \text{ jours}}$$

(15)



(16) Au départ de la Terre, $\vec{V}$ est colinéaire à l'orbite de la Terre

$\hookrightarrow$ $\underline{\dot{r} = 0 \Rightarrow \text{périhélie}}$

(17) On se place au périhélie,

$$r(\theta = 0) = a_T = \frac{p}{1 + e}$$

On se place au niveau du point d'arrivée sur Mars : $r\left(\theta = \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{p}{1 + e\cos\frac{3\pi}{4}}$

$$a_n = \frac{p}{1 - \frac{e\sqrt{2}}{2}}$$

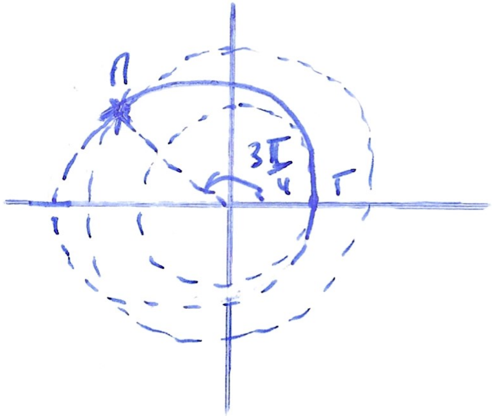
Donc $a_n = \dfrac{(1+e)\, a_T}{1 - \frac{e}{\sqrt{2}}}$

$$\left(1 - \frac{e}{\sqrt{2}}\right) a_n = (1+e)\, a_T$$

$$e\left(\frac{a_n}{\sqrt{2}} + a_T\right) = -a_T + a_n$$

$$\boxed{e = \frac{a_n - a_T}{\frac{a_n}{\sqrt{2}} + a_T}}$$

$$e = \frac{228 - 150}{\frac{228}{\sqrt{2}} + 150} = \underline{0{,}251 = e}$$



(18) $\mathcal{E}_n = -\frac{G M_s m}{2a}$; $V_T = \sqrt{\frac{G M_s}{a_T}}$

$p = a_T(1+e)$

l'aphélie se trouve en $\theta = \pi$

$r_a = \frac{p}{1-e} = a_T\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$

$2a = r_a + r_p = a_T\left(1 + \frac{1+e}{1-e}\right)$

$2a = a_T \frac{1 \cancel{-e} + 1 \cancel{+e}}{1-e} = \frac{2a_T}{1-e}$

$\mathcal{E}_n = -a_T V_T^2 m \times \frac{1-e}{2a_T}$

Soit $\boxed{\mathcal{E}_n = -\frac{V_T^2 m(1-e)}{2}}$

(19) $\mathcal{E}_n = \frac{1}{2} m V_T''^2 - \frac{G M m}{a_T} = -\frac{V_T^2 m(1-e)}{2}$

$\frac{1}{2} V_T''^2 - V_T^2 = -\frac{V_T^2(1-e)}{2}$

$V_T''^2 = V_T^2\left(2-(1-e)\right) \Rightarrow \boxed{V_T\sqrt{e+1} = V_T''}$

(20) $\boxed{\Delta V_T' = V_T\left(\sqrt{e+1} - 1\right)}$

$\Delta V_T' = 29{,}8\left(\sqrt{0{,}251+1} - 1\right) = \underline{3{,}53 \text{ km/s}}$

(21) Au niveau du périhélie, $r = a_T$ et $\dot\theta = \frac{V_T''}{a_T}$

Donc $\boxed{C = a_T V_T''}$

(22) $dt = \frac{r^2 d\theta}{C} \Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{C}\int_0^{3\pi/4}\left[\frac{a_T(1+e)}{1+e\cos\theta}\right]^2 d\theta$

$\boxed{\Delta t' = \frac{a_T^2(1+e)^2}{C}\int_0^{3\pi/4}\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta}$

$\Delta t' = \frac{(1+e)^2}{V_T\sqrt{1+e}}\int_0^{3\pi/4}\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta$

$\underline{\Delta t' = 175 \text{ jours}}$

La durée du voyage a été réduite de 84 jours (32%)