



Durée 4h - L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'épreuve se compose de 2 problèmes totalement indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les principaux résultats seront encadrés.

Première partie

Supports : adhérence ou pas ?

Le problème s'intéresse à différents cas de frottements secs qui induisent des types de mouvement relatif possible dans certaines conditions pour un couple solide 1 - solide 2. Ces propriétés viennent du choix du support pour un mobile donné.

1 Lois de Coulomb relatives au glissement

On note f_s et f_d les coefficients statiques et dynamiques du frottement. \vec{T} et \vec{N} sont les composantes tangentielle et normale de la réaction du support.

1. Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement \vec{v}_g du solide 1 sur le solide 2 en un point de contact. Doit-on préciser dans quel référentiel elle est exprimée ?
2. Énoncer les lois de Coulomb dans le cas du glissement et du non glissement.
3. Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement. Expliquer de même à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence.

2 Mesure du coefficient de frottement dynamique

On utilise le dispositif représenté sur la figure 1. Un solide 1 de masse M est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse αM ($\alpha > 1 > f_s$). Le fil sans masse de longueur L passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle H l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal S' .

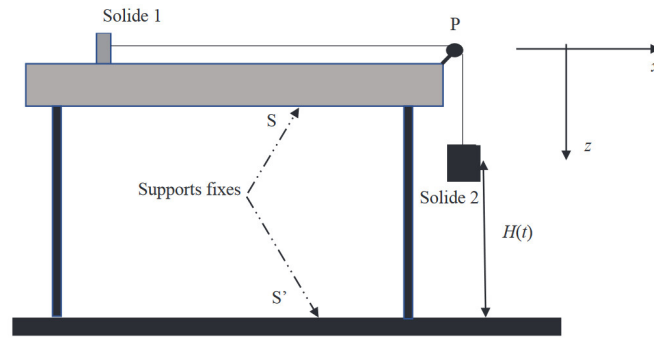


FIGURE 1 – Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique

À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse $X(t = 0) = X_0$ et le solide 2 est à l'altitude $H(t = 0) = H_0$.

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient f_d de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On mesure la distance totale D parcourue par le solide 1 sur le support S, sachant que le solide 2 touche S' avant que le solide 1 ne s'arrête.

On note g l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1, avec f_d le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

- Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu.
- La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme F de la tension du fil est conservée tout le long du fil. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au solide 1 et au solide 2, exprimer l'accélération du solide 1 \ddot{X} en fonction f_d , g , α et \ddot{Z} l'accélération verticale du solide 2. En déduire que \ddot{X} est une constante que l'on exprimera en fonction de f_d , g et α .
- Quelle est la durée t_1 de cette première phase ?
- Quelle est la vitesse correspondante atteinte V_1 ?

On s'intéresse désormais à la deuxième phase du mouvement.

- Exprimer $X(t)$ dans cette phase en fonction de t , t_1 , V_1 , X_0 , H_0 , g et f_d .
- Exprimer f_d en fonction de α , H_0 et D .
- On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de $H_0 = 40,0$ cm. La masse du solide 1 vaut $M = 50$ g et celle du solide 2 vaut $\alpha M = 60$ g. Calculer la valeur du coefficient de frottement f_d sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance D égale à $\langle D \rangle = 1,50$ m.

3 Mesure du coefficient de frottement statique

- On pose maintenant le solide 1 sur le support S qui fait un angle θ avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la figure 2.

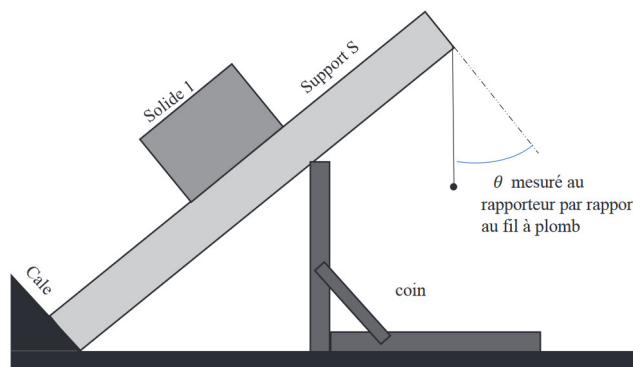


FIGURE 2 – Deuxième dispositif : mesure du coefficient de frottement statique.



On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle θ en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur $\theta = \theta_{lim}$ le solide 1 se met à glisser. On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de θ_{lim} est de $29,5^\circ$. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement f_s . En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement mesuré.

4 Phénomène de « stick-slip »

Le phénomène « stick-slip » (littéralement coller-glisser) intervient quand les coefficients de frottement statique et dynamique ont des valeurs très différentes. Il s'agit d'un mouvement saccadé qui contient des phases de glissement et d'adhérence successives dont on décrit ci-dessous une modélisation.

Le solide 1 de masse $M = 50 \text{ mg}$ est relié par un ressort de raideur k à un point fixe A. Il se déplace sur un tapis roulant horizontal caractérisé par un coefficient de frottement dynamique nul et par un coefficient statique $f_s = 0,6$. La situation est représentée figure 3. On note $X(t)$ l'allongement instantané du ressort. Dans la situation initiale, $X(t = 0) = X_0 > 0$ et le solide 1 est abandonné sans vitesse initiale relativement au tapis. Celui-ci se déplace à la vitesse uniforme $\vec{V} = V\vec{e}_x$.

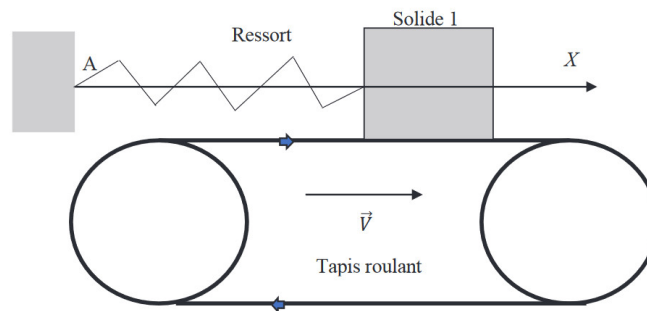


FIGURE 3 – Modélisation du « stick-slip »

- Établir les expressions de l'allongement X_1 et de la date t_1 associés au début de glissement du solide 1 par rapport au tapis.
- Quelle est la nature du mouvement après la date t_1 ?
- Déterminer par une méthode énergétique l'allongement maximal X_M atteint par la masse en fonction de X_1 , V et la pulsation propre de l'oscillateur ω_0 .
- Déterminer les fonctions allongement $X(t)$ et vitesse $\dot{X}(t)$ pendant la phase de glissement.
- Pour quelle valeur de $\dot{X}(t = t_2)$ cette phase s'arrête-t-elle ? Représenter l'allure de $X(t)$ et de $\dot{X}(t)$ entre $t = 0$ et $t = t_2$.
- À quelle condition d'inégalité entre la période propre τ_0 et $\frac{X_1}{V}$ peut-on considérer que l'abscisse maximale X_M est très voisine de X_1 ?

On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite de cette partie.

- Montrer qu'alors la fréquence approchée du mouvement est donnée par : $\nu = \frac{\omega_0^2 V}{2gf_s}$. Évaluer numériquement cette fréquence en supposant que la raideur vaut $4,0 \text{ kN/m}$ et que la vitesse du tapis roulant vaut $6,0 \text{ cm/s}$.
- Représenter l'allure de $X(t)$ sur quelques périodes.
- Ce phénomène se retrouve dans beaucoup de situations quotidiennes : craie qui crisse sur un tableau, porte qui grince, pneu qui crisse et archet de violon. Dans quel domaine de fréquences sont donc ces mouvements de « stick-slip » ? Pourquoi en cassant la craie supprime-t-on ce crissement, sachant que la raideur k d'un bâton est inversement proportionnelle au cube de sa longueur ?
- Évaluer le travail des forces de frottement sur une période dans ce modèle.



Deuxième partie

NASA's Mars Exploration Program

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Ce problème propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses.

On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

1 Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.
2. Montrer que le moment cinétique \vec{L}_O en O , centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.
3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z tel que $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_O et m . Quel est le nom de cette grandeur ?
4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R , la vitesse V de l'objet en fonction de G , M_S , R et m . Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

2 Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

5. Exprimer l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G , M_S , R et m .
6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G , M_S et R (troisième loi de Kepler).
7. Rappeler les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler dans le cas d'une orbite elliptique de demi-grand axe a .

3 Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

8. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann). La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).
9. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T , a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T .

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

10. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.
11. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta_T(t = 0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.



12. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

4 Durée de la mission

Toujours pour minimiser le coût énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

13. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.
 14. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta \vec{V}_T$ colinéaire à \vec{V}_T plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = \frac{3\pi}{4}$.

On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

15. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.
 16. Justifier que r_P , le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.
 17. Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$ et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.
 18. Exprimer l'énergie mécanique \mathcal{E}_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m , V_T et e .
 19. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e .
 20. Donner, en fonction de V_T et e , la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.
 21. Exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de a_T et V_T'' .
 22. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars. On donne :

$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1 + e \cos(\theta))^2} d\theta = 2,15$$

avec l'excentricité calculée en question 17. Commenter.

**Données numériques :**

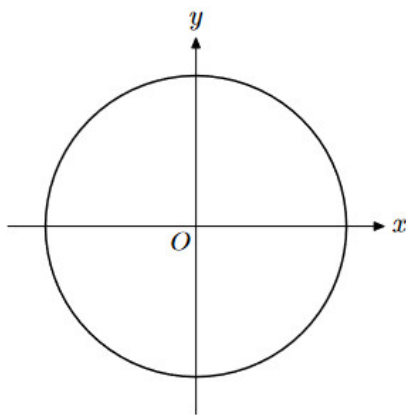
- Masse du Soleil $M_S = 2,00 \times 10^{30}$ kg
- Demi-grand axe de l'orbite de la Terre $a_T = 150 \times 10^6$ km
- Demi-grand axe de l'orbite de Mars $a_M = 228 \times 10^6$ km
- Constante gravitationnelle $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI
- Champ de pesanteur terrestre $g = 9,81$ m/s²
- Période de révolution de la Terre $T_T = 365$ jours
- Période de révolution de Mars $T_M = 687$ jours

Formulaire : les coniques

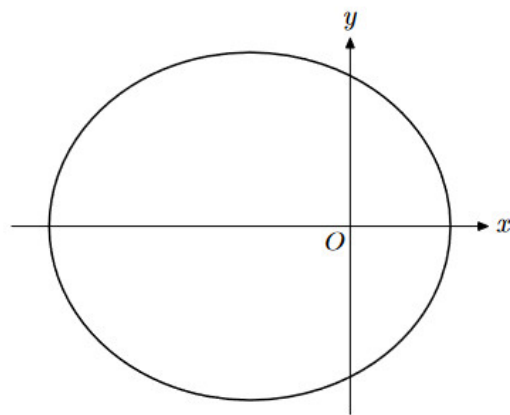
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

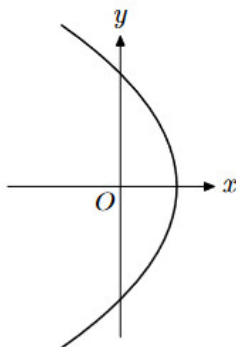
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas



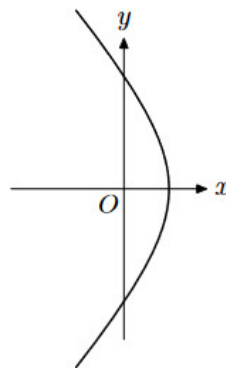
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole



Annexe à rendre avec la copie

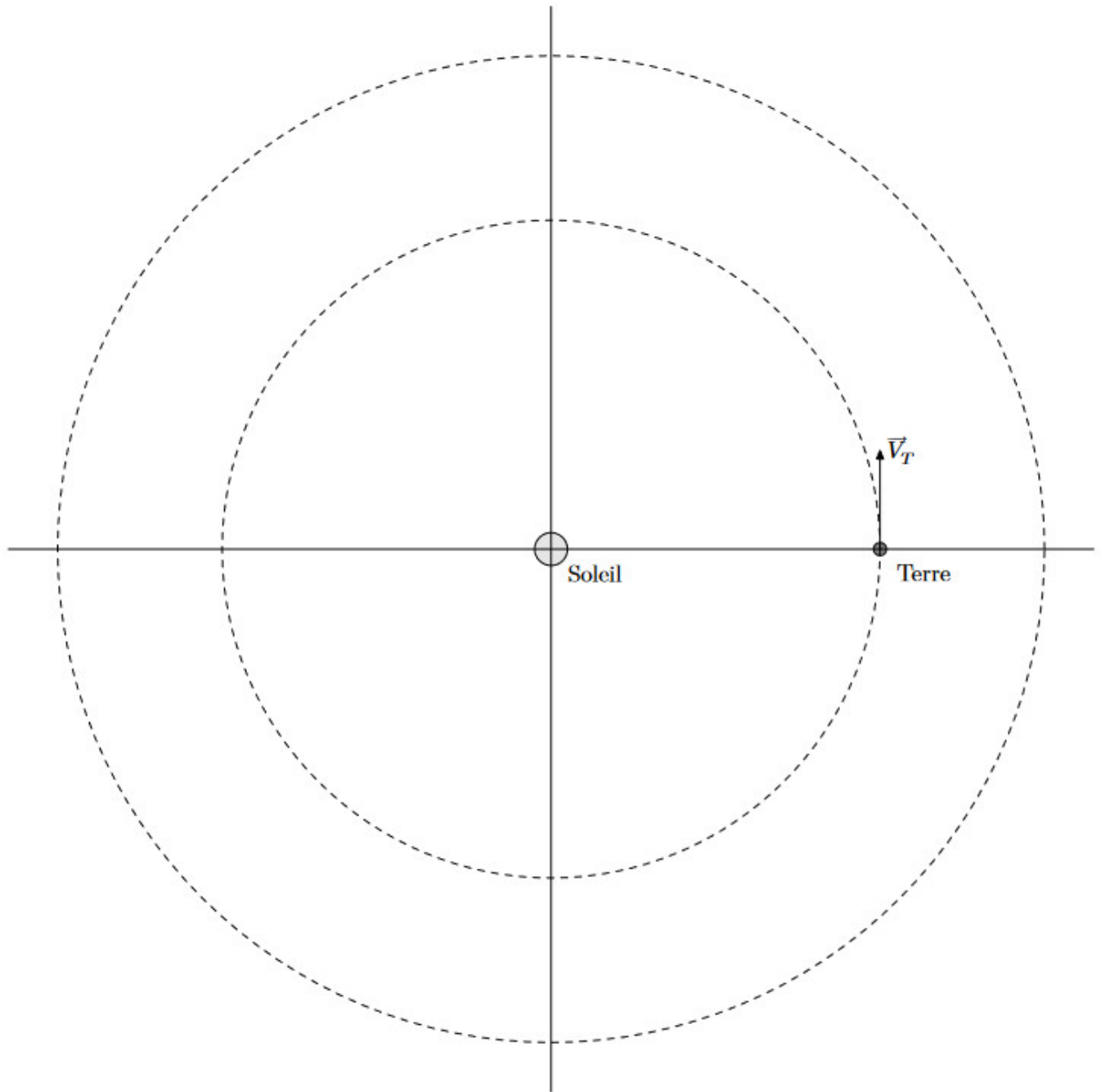


Figure A

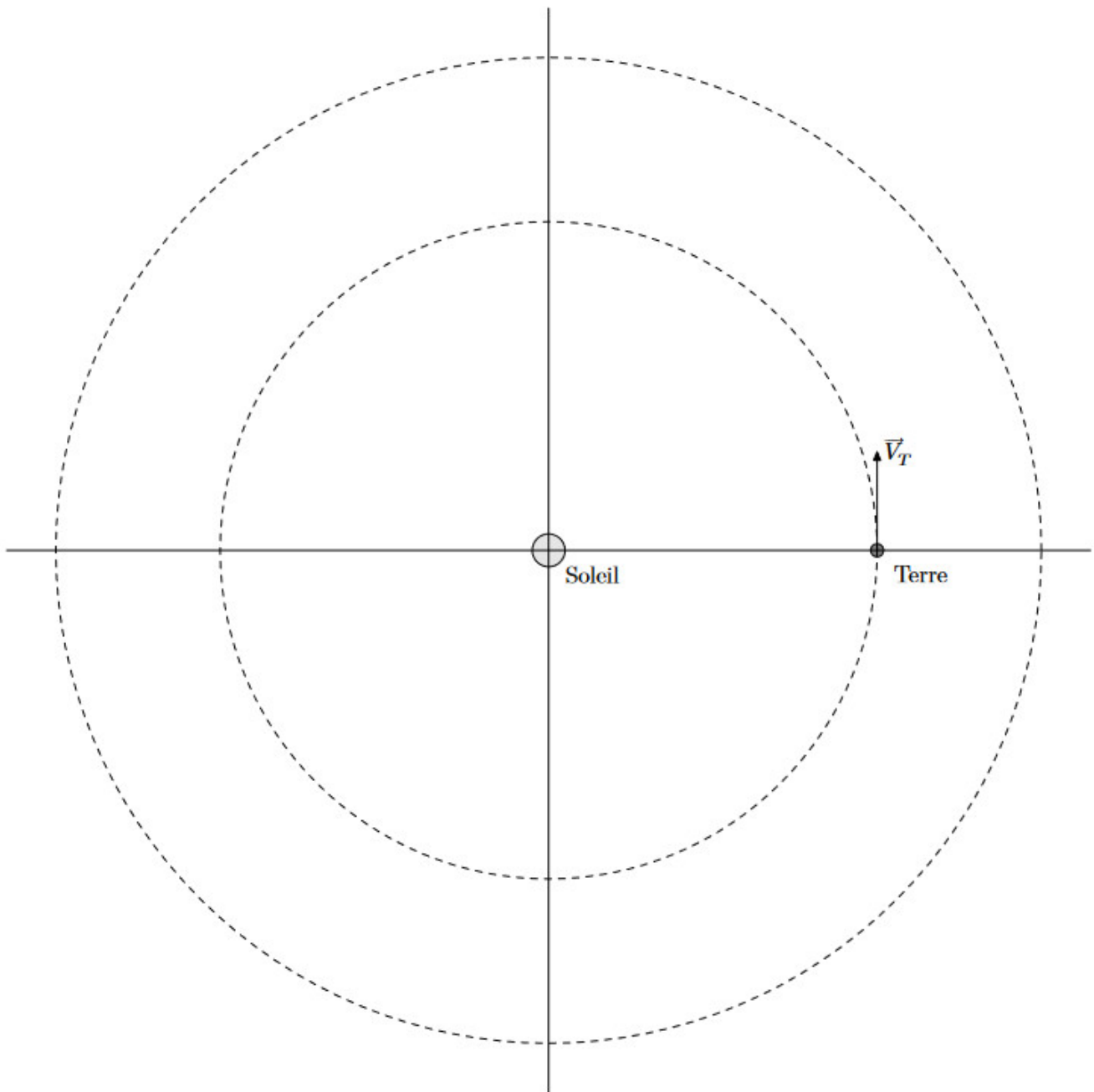


Figure B