DS5 **Résonance et plasmons de surface**

(D'après Mines-Ponts PSI 2012)

I Résonance en mécanique

1) Réf : terrestre (galiléen)

Syst : la masse m

PFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{m\vec{g} + \vec{R}}_{\vec{0}} - \vec{F_v} - kx\vec{e_x} + \vec{F_e}$

$/\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = -2\xi\omega_0 m\dot{x} - \omega_0^2 m x + \omega_0^2 m x_0 \cos(\omega t)$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0 \cos(\omega t)$$

2) Dans le cas général $x(t) = x_p(t) + x_g(t)$

- $x_p(t)$ est une solution particulière de l'éq. diff.

$$x_p(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$$

. Elle traduit le RSF

- $x_g(t)$ est la solution générale de l'éq. diff homogène

Elle traduit le régime transitoire.

On suppose $\xi \ll 1 \Rightarrow$ Régime oscillant

Éq. caractéristique : $X^2 + 2\xi\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = 4(\xi^2 - 1)\omega_0^2 \ll 1$

$$X_\pm = \frac{-2\xi\omega_0 \pm 2\omega_0 i\sqrt{1-\xi^2}}{2}$$

$X_\pm = -\omega_0(\xi \mp i\sqrt{1-\xi^2})$ $\boxed{\omega = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0}$

$x_g(t) = Ae^{X_+t} + Be^{X_-t}$

$$x_g(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)]$$

Dans la limite $t \gg (\xi\omega_0)^{-1}$

le régime permanent est établi

$x(t) = x_p(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$

On pose $\underline{x} = X_m e^{i\omega t}e^{i\varphi} = \underline{X_m}e^{i\omega t}$

$\underline{x}(-\omega^2 + 2\xi\omega_0\omega i + \omega_0^2) = \omega_0^2 x_0 e^{i\omega t}$

$$\underline{X_m} = \frac{\omega_0^2 x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\xi\omega\omega_0}$$

$$|\underline{X_m}| = X_m = \left|\frac{x_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 2i\xi\frac{\omega}{\omega_0}}\right|$$

$$X_m = \frac{x_0}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

X_m est maximal si $\frac{d}{d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2\right]=0$

On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

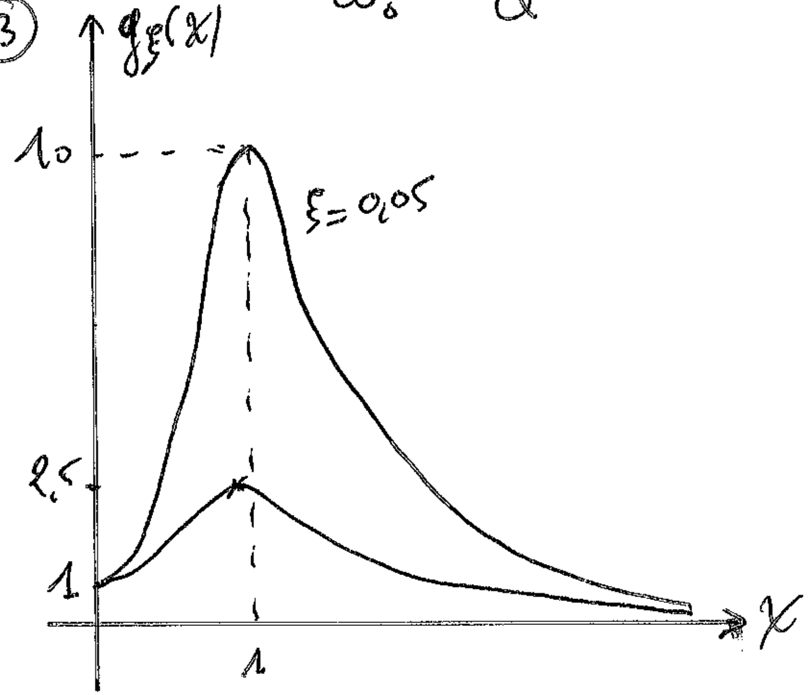
$$2(1-x^2)(-2x) + 4\xi^2 \times 2x = 0$$

$$1-x^2-2\xi = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{1-2\xi^2}\,\omega_0}$$

Si $\xi \ll 1$, $\omega_n \simeq \omega_0$, $\boxed{X_n = \frac{x_0}{2\xi}}$

De plus $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$ avec $Q = \frac{1}{2\xi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\omega = 2\xi\omega_0}$

3



4 PFD sur le système {membrane + solénoïde} de masse supposé nulle projeté sur l'axe des x :

$$(\vec{F_p} + \vec{F_L})\cdot\vec{e_x} = 0$$

Avec $\vec{F_p}$ la resultante des forces pressantes : $\vec{F_p} = (p_r + p_i)\Sigma\vec{e_x}$

$\vec{F_L}$ la force de Laplace :

$$\vec{F_L} = \int_{\text{Bobine}} i\,d\vec{l}\wedge\vec{B} = \pm i l B\,\underbrace{\vec{e_\theta}\wedge\vec{e_r}}_{-\vec{e_x}}$$

On choisit $\vec{F_L} = ilB\vec{e_x}$ avec $i > 0$ tq $\vec{F_L}$ orienté comme l'axe des x conformément à l'énoncé.

Donc $\boxed{(p_r+p_i)\Sigma + ilB = 0}$

5 $\mathcal{P}_L = ilB\dot{x} = -ei$

loi des mailles : $Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C_a} = e$

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C_a} = \frac{de}{dt} = -lB\ddot{x}$$

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC_a}\,i = -\frac{lB}{L}\frac{d^2x}{dt^2}}$$

6) En RSF $(\underline{p_r} + \underline{p_i})\Sigma + \underline{i}\ell B = 0$

$$(\lambda + 1)\underline{p_i}\Sigma + \underline{i}\ell B = 0$$

Or $\left(-\omega^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{1}{LC}\right)\underline{i} = \frac{\ell B}{L}\omega^2 \underline{x}$

De plus, au niveau de la membrane.

$$j\omega\underline{x} = \underline{v_i} + v_r = \frac{p_i - p_r}{\rho c_s} = (1-\lambda)\frac{p_i}{\rho c_s}$$

$$\frac{(1+\lambda)}{(1-\lambda)}\rho c_s j\omega \underline{x}\Sigma + \underline{i}\ell B = 0$$

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = -\frac{\ell B}{\rho c_s j\omega\Sigma}\frac{\underline{i}}{\underline{x}} = -\frac{\ell B}{\Sigma\rho c_s j\omega}\frac{\frac{\ell B\omega^2}{L}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 + \frac{R}{L}j\omega\right)}$$

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \frac{\frac{\ell^2 B^2}{\Sigma\rho c_s}}{j\left(L\omega - \frac{1}{C_a\omega}\right) + R} = \frac{R_m}{R + j\Omega(\omega)}$$

Avec $\boxed{R_m = \frac{\ell^2 B^2}{\Sigma\rho c_s}}$ $\qquad \left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right] = 1 \Rightarrow [R_m] = [R]$

7) • $B = 0 \rightarrow R_m = 0$

$1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1$

$p_r = -p_i \Rightarrow p = p_0$ tuyau ouvert

• $B \rightarrow +\infty \rightarrow R_m \rightarrow +\infty$

$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lambda \rightarrow +1$

$\hookrightarrow \dot{x} = 0 \rightarrow$ extrémité totalement rigide.

8) $|\lambda| = 0$ pour $\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = 1$

ie $R = R_m$ et $\Omega(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC_a}}$

On dit qu'il y a <u>adaptation d'impédance</u>.

$$R = \frac{B^2\ell^2}{c_s\rho\Sigma} \Rightarrow \boxed{B = \sqrt{\frac{R c_s \rho\Sigma}{\ell^2}}}$$

$$B = \sqrt{\frac{100 \times \frac{6}{5} \times 10 \cdot 10^{-4} \times \frac{10^3}{3}}{4^2}}$$

$$\underline{B = 1{,}6\ T}$$

(9) $\underline{1} + \underline{\lambda} = \dfrac{R_m}{R + j\Omega}(1 - \lambda)$

$$\underline{\lambda}\left(1 + \frac{R_m}{R+j\Omega}\right) = \frac{R_m}{R+j\Omega} - 1$$

$$\underline{\lambda} = \frac{\frac{R_m}{R+j\Omega} - 1}{\frac{R_m}{R+j\Omega} + 1} = \frac{R_m - R - j\Omega}{R_m + R + j\Omega}$$

$$|\underline{\lambda}| = \sqrt{\frac{(R_m - R)^2 + \Omega^2}{(R_m + R)^2 + \Omega^2}}$$

AN : $\Omega = L\omega - \dfrac{1}{\omega C_a} = 0{,}1 \times \sqrt{2}.10^3 - \dfrac{1}{\sqrt{2}.10^3 \times 10^{-5}}$

$\Omega = 70{,}7\ \Omega$

$|\underline{\lambda}| = 0{,}33$

• On constate bien que $|\underline{\lambda}|$ est minimal pour $\omega \simeq \omega_0$

• $|\underline{\lambda}| = 0$ pour $\omega = \omega_0$ et $R = R_m$.

(II) Plasmons de surface.

(10) Eq locale de conservation de la charge :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Pour une distribution surfacique

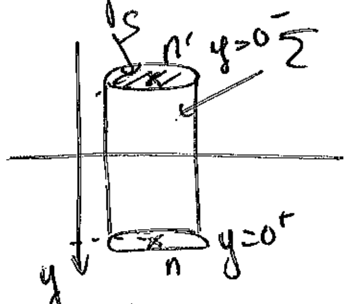
$$\operatorname{div} \vec{j}_s + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

(11) Soit M un point quelconque de l'espace. le plan $(M \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est plan de symétrie pour la distribution de charge et de courant

donc $\vec{E} = E_y \vec{e_y} + E_z \vec{e_z}$

De plus la distribution est invariante par translation selon Ox donc $\vec{E}$ ne dépend pas de x

(12)



$\oint_{\Sigma} (\vec{E}) = \oint\!\!\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$

$\iint_{\Sigma lat} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$

Or $\vec{E}(y = 0^-, z, t) = -\vec{E}(y = 0^+, z, t)$

Donc $\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \ell E(y=0^+, z, t) S$

Th de Gauss : $\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(y=0^+, z, t) = \frac{\sigma(z,t)}{2\varepsilon_0}\vec{e_y}}$$

(13) Dans le vide $\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix}$ Donc $\Delta E_y = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$

Or E_y est de la forme $f(y)e^{i(Kz-\omega t)} = E_y$

$$\Delta E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \left[f''(y) - K^2 f(y)\right]e^{i(Kz-\omega t)}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} f(y) e^{i(Kz-\omega t)}$$

$$f''(y) - K^2 f(y) = -\frac{\omega^2}{c^2} f(y)$$

$$f''(y) + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - K^2\right)}_{<0} f(y) = 0$$

Donc $f(y) = A e^{\sqrt{K^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\,y} + B e^{-\sqrt{K^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\,y}$

Or E_y ne peut diverger en $y = +\infty$

Donc dans la region $y \geq 0$

$$f(y) = A e^{-\sqrt{K^2 - k^2}\,y}$$

$$\vec{E}(y=0^+, z, t) = \frac{\sigma(z,t)}{2\varepsilon_0}\vec{e_y} = A e^{i(Kz-\omega t)}$$

Or d'apres l'eq. de continuite de la charge,

$$\frac{\partial \vec{j_s}}{\partial z}\cdot\vec{e_z} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -iKj_{sm}e^{i(Kz-\omega t)} = i\omega\sigma$$

$$\sigma = \frac{Kj_{sm}}{\omega}e^{i(Kz-\omega t)} = Ae^{i(Kz-\omega t)}$$

On a donc $\boxed{E_y = \dfrac{Kj_{sm}}{2\omega\varepsilon_0} e^{i(Kz-\omega t)} e^{-\sqrt{K^2-k^2}\,y}}$

Expression de E_z : $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial x}\cdot\vec{e_x} + \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial y}\cdot\vec{e_y} + \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial z}\cdot\vec{e_z}$

$\operatorname{div}\vec{E} = 0$ dans le vide donc $\dfrac{\partial E_y}{\partial y} = -\dfrac{\partial E_z}{\partial z}$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\sqrt{K^2-k^2}\,\frac{Kj_{sm}}{2\omega\varepsilon_0}e^{i(Kz-\omega t)}e^{-\sqrt{K^2-k^2}\,y}$$

$$\boxed{E_y = -\sqrt{1-\left(\frac{k}{K}\right)^2}\,\frac{K j_{sm}}{2i\omega\varepsilon_0}\, e^{i(Kz-\omega t)}\, e^{-\sqrt{K^2-k^2}\,y}}$$

(14) Onde progressive amortie ($e^{-\sqrt{K^2-k^2}\,y}$)

(15) $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$

$\frac{\|\vec{F}_E\|}{\|\vec{F}_B\|} = \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|} \sim \frac{v_\varphi}{v} \gg 1$ ⇒ On néglige la force magnétique devant la force électrique.

On néglige également le poids des électrons.

PFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} = -e\vec{E}(y=0,z,t) \Rightarrow i\omega\vec{v} = -e\vec{E}(y=0,z,t)$

$\vec{v} = \frac{ie\vec{E}}{m\omega}(y=0,z,t)$ Or $E_y(y=0,z,t)=0$ car (O,x,z) plan de symétrie pour la distribution de charge et de courants.

Donc $\vec{E}(y=0,z,t) = E_z(y=0,z,t)\,\vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ie}{m\omega}E_z(y=0,z,t)\,\vec{e}_z}$$

(16) $\vec{j}_s = -\rho e\vec{v} = +\frac{\rho e^2}{m\omega}\sqrt{1-\left(\frac{k}{K}\right)^2}\,\frac{K j_{sn}}{2\omega\varepsilon_0}\,e^{i(Kz-\omega t)}\,\vec{e}_z$

Or $\vec{j}_s = j_{sn}\,e^{i(Kz-\omega t)}\,\vec{e}_z$

Par identification, $\frac{K\rho e^2}{2\varepsilon_0 m\omega^2}\sqrt{1-\left(\frac{k}{K}\right)^2} = 1$

$\frac{K\Omega_s c}{2\omega^2}\sqrt{1-\left(\frac{k}{K}\right)^2} = 1$

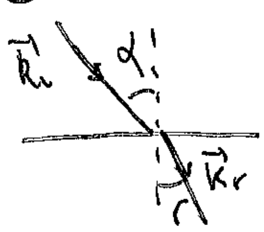
$1-\left(\frac{\omega}{Kc}\right)^2 = \left(\frac{4\omega^2}{Kc\Omega_s}\right)^2 \ldots$

$\left(\frac{\omega}{Kc}\right)^2\left(\frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}+1\right) = 1$

$\left(\frac{\omega}{Kc}\right)^2 = \frac{1}{1+\frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}} \Leftrightarrow \boxed{K = \frac{\omega}{c}\sqrt{1+\frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}}}$

(17) Relation de dispersion des OPPH dans le vide $K=\frac{\omega}{c}$ incompatible avec la relation de dispersion des plasmons de surface.

(18) Loi de la réfraction : $n\sin\alpha = \sin r$



$\vec{k}_r = k(\cos r\,\vec{u}_y + \sin r\,\vec{u}_z)$

$$\boxed{\vec{k}_r = ik\beta\,\vec{u}_y + k\sin r\,\vec{u}_z \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}}$$

(19) On peut exciter le plasmon avec

$$K = k \sin r$$

(20) $$k \sin r = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 + \frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}}$$

$$\cancel{\frac{\omega}{c}}\, n \sin\alpha = \cancel{\frac{\omega}{c}}\sqrt{1 + \frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}}$$

$$n^2 \sin^2\alpha = 1 + \frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}$$

$$\omega^2 = (n^2 \sin^2\alpha - 1)\frac{\Omega_s^2}{4}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\Omega_s}{2}\sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}}$$

(21) Si on excite un plasmon de surface, une partie de l'énergie incidente va être utilisée pour l'excitation de ce plasmon. Il y aura donc moins d'énergie réfléchie.

(22) La baisse d'intensité observée correspond à la résonance du plasmon.

Pour d_2 et $\alpha \approx 39{,}5°$ l'énergie incidente est pratiquement entièrement transmise au plasmon $\Rightarrow$ adaptation d'impédance

(23) $\text{div}\, \vec{E} = 0$ (plasma localement neutre)

$$\text{div}\, \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\, \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\, \vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

$$= \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\, \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Dans un plasma on néglige le courant d'ions devant le courant d'électrons

Donc $\vec{j} = n e \vec{v_e}$

PFD sur un e^- $\quad m\frac{d\vec{v_e}}{dt} = q\vec{E}$ (e^- non relativiste) on néglige la force magnétique

$\mathbb{C}$ $m\, i\omega \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$

Donc $$\underline{\vec{j}} = \frac{n e^2}{i\omega m}\underline{\vec{E}}$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 n e^2}{i\omega m}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{n e^2}{i\omega \varepsilon_0 c^2 m}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

On considère une onde transversale plane :

$$\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{e_z}$$

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_z \vec{e_z} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\vec{e_z} = -k^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$$

$$-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{n e^2}{\varepsilon_0 c^2 m}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec } \omega_p^2 = \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m}$$

Propagation si k réel donc $\underline{\omega \geq \omega_p}$