

DS N°5 MP*/MPI*

Durée: 4h

Calculatrice autorisée

- Il est vivement conseillé de réserver du temps pour examiner l'ensemble des questions (jusqu'à la dernière) et de soigner la rédaction (invariances, propriétés de symétrie, hypothèses du modèle...)
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

RÉSONANCES & PLASMONS DE SURFACE

Le problème se compose de **deux** parties largement indépendantes. La première partie présente un modèle qui servira dans la partie suivante pour résoudre qualitativement par analogie quelques questions, avec des calculs plus simples. La dérivée par rapport au temps t d'une fonction $x(t)$ est notée \dot{x} . Hormis j dans la partie I et i dans la partie II, les nombres susceptibles d'avoir une partie imaginaire non nulle sont soulignés. La notation $\Re_e(z)$ signifie partie réelle du nombre complexe z . Les vecteurs sont notés avec un chapeau s'ils sont unitaires \hat{e}_x , avec une flèche \vec{v} dans le cas général. Les applications numériques peuvent toutes être effectuées sans calculatrice, il n'est donc demandé de fournir qu'un ordre de grandeur correct.

I. — Résonance en mécanique

Dans toute cette partie on notera j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

I.A. — L'oscillateur harmonique amorti entretenu.

Une masse m supposée ponctuelle et dont l'abscisse est repérée par la fonction $x(t)$, peut se déplacer sur un plan horizontal sous l'action d'un ressort de raideur k_0 . On posera $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$. Elle est soumise à une force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse $\vec{F}_v = -f \dot{x} \hat{e}_x$, créée par un amortisseur à air comme représenté sur la figure 1. En faisant apparaître un facteur d'amortissement sans dimension $\xi > 0$, le coefficient f peut être mis sous la forme $f = 2\xi \omega_0 m$. À l'instant $t = 0$ la masse est abandonnée sans vitesse initiale d'une position $x(t=0) = x_0 > 0$. On entretient les oscillations du système en exerçant sur la masse m et à partir de $t = 0$, une force sinusoïdale de pulsation ω qui s'écrit $\vec{F}_e = k_0 x_0 \Re_e(e^{j\omega t}) \hat{e}_x$. L'origine de l'axe des x correspond à la position de la masse lorsque le ressort n'est ni étiré ni compressé.

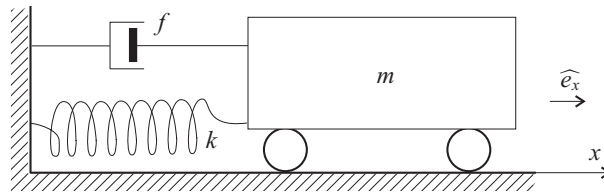


FIGURE 1 – Oscillateur mobile amorti

- ❑ 1 — Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et décrivant le mouvement de m . On utilisera les seuls paramètres ξ , ω_0 , ω et x_0 .
- ❑ 2 — Résoudre l'équation obtenue à la question 1 dans le cas général. On note X_m l'amplitude du mouvement dans la limite $t \gg (\xi \omega_0)^{-1}$, exprimer dans cette limite
- la valeur ω_M de ω rendant maximale la fonction $X_m(\omega)$. On exprimera ω_M en fonction de ω_0 et ξ ;
 - la valeur $X_M = X_m(\omega_M)$ dans la limite $\xi \ll 1$;
 - la largeur de la bande passante $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ avec $X_m(\omega_2) = X_m(\omega_1) = X_M/\sqrt{2}$, toujours dans la limite $\xi \ll 1$.
- ❑ 3 — En considérant la variable $\chi = \omega/\omega_0$, tracer une représentation graphique approximative de la fonction $g_\xi(\chi) = X_m(\chi)/x_0$ pour $\xi = 0,05$ et $\xi = 0,2$.

I.B. — Interaction électromécanique.

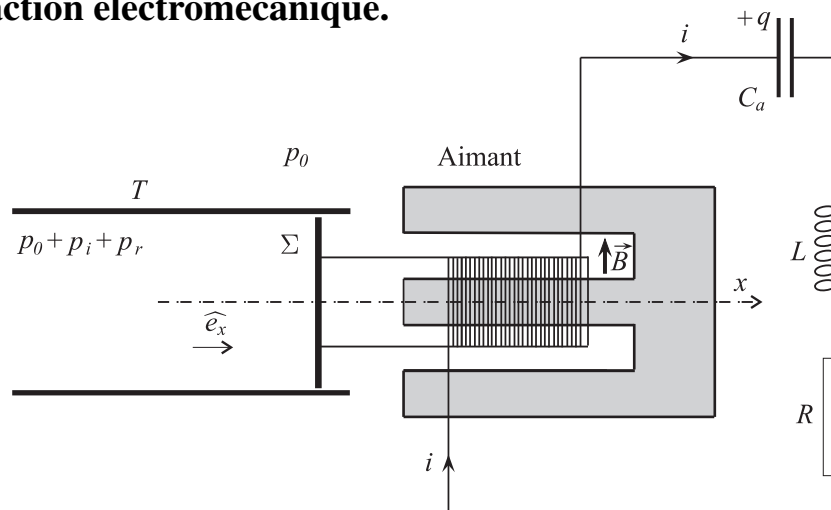


FIGURE 2 – Vue en coupe d'un couplage électromécanique

Une onde sonore plane sinusoïdale progressive incidente se propage de la gauche vers la droite dans un tube T comme représenté en coupe sur la figure 2. L'onde réfléchie sur une membrane d'aire Σ se propage quant à elle de la droite vers la gauche sur cette même figure. La surpression due à l'onde incidente est notée p_i , et celle due à l'onde réfléchie p_r . À l'extérieur du tube la pression p_0 est supposée constante, à l'intérieur du tube elle s'écrit $p = p_0 + p_i + p_r$.

Cette membrane est solidaire d'un solénoïde constitué par un fil de longueur totale ℓ , qui s'enfile sur un aimant de telle manière que ce fil, sur toute sa longueur, soit soumis à un champ magnétique \vec{B} radial (donc perpendiculaire au fil qui est orthoradial) d'intensité $B = \|\vec{B}\|$ uniforme dans l'espace et constante dans le temps. L'ensemble du dispositif : tube, solénoïde, aimant, possède la symétrie de révolution autour de l'axe des x .

Le fil est relié à un circuit R, L, C_a . Le sens du courant choisi est tel que $i > 0$ donne une force de LAPLACE orientée comme l'axe des x . On suppose que cette force est intégralement transmise

à la membrane qui est également soumise aux forces de pression mais libre de toute autre force. Cette membrane coulisse librement le long de l'axe des x . On néglige tout frottement mécanique, ainsi que l'émission éventuelle d'une onde sonore vers la droite par la membrane. La représentation complexe de l'abscisse de la membrane s'écrit $x(t) = X e^{j\omega t}$. On rappelle que pour une onde sonore, la surpression est telle que $p_i = \rho c_s v_i$, pour l'onde incidente se propageant vers la droite, et $p_r = -\rho c_s v_r$ pour l'onde réfléchie se propageant la gauche. Le paramètre ρ désigne la masse volumique moyenne de l'air, c_s la célérité du son dans l'air et v_i et v_r la vitesse de l'air au passage des ondes correspondantes. On pourra utiliser les représentations complexes de ces deux vitesses $v_i = V_i e^{j\omega t}$ et $v_r = V_r e^{j\omega t}$. **Par continuité des vitesses, la vitesse de la membrane est égale à la vitesse de l'air au niveau de la membrane, c'est à dire: $dx/dt = v_r + v_i$**

❑ 4 — Écrire le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe des x appliqué au système membrane-solénoïde en supposant que sa masse est nulle.

❑ 5 — Exprimer la puissance de la force de Laplace de B, I et dx/dt . On note e la force électromotrice induite. Sachant que la puissance de la force de Laplace est égale à $-ei$, établir l'équation différentielle vérifiée par i .

❑ 6 — On définit le coefficient de réflexion $\underline{\lambda}$ par la relation $p_r = \underline{\lambda} p_i$, montrer que

$$\frac{1 + \underline{\lambda}}{1 - \underline{\lambda}} = \frac{R_m}{R + j\Omega(\omega)} \text{ avec } \Omega(\omega) = L\omega - (C_a\omega)^{-1}$$

où l'on exprimera R_m en fonction de B, ℓ, ρ, c_s et Σ . On vérifiera que R_m est homogène à une résistance.

❑ 7 — Interpréter les valeurs de $\underline{\lambda}$ correspondant à $B = 0$ et à $B \rightarrow +\infty$.

❑ 8 — Dans quelles conditions peut-on obtenir $|\underline{\lambda}| = 0$? Quel nom donner à cet ajustement? Calculer la valeur numérique de B correspondant à cet ajustement pour $\ell = 4 \text{ m}$; $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$; $\rho = \frac{6}{5} \text{ kg.m}^{-3}$; $c_s = \frac{1}{3} \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ et $R = 100 \Omega$.

❑ 9 — Calculer $|\underline{\lambda}|$ en fonction de R_m, R et $\Omega(\omega)$. Déterminer la valeur numérique de $|\underline{\lambda}|$ si $C_a = 10 \mu\text{F}$; $L = 0,1 \text{ H}$; $R_m = 150 \Omega$; $R = 100 \Omega$ et $\omega = \sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. En utilisant les divers résultats de la question 2, interpréter et commenter les différentes courbes de la figure 3 qui représente $|\underline{\lambda}|$ en fonction de ω pour $R_m = 66; 100$ et 150Ω .

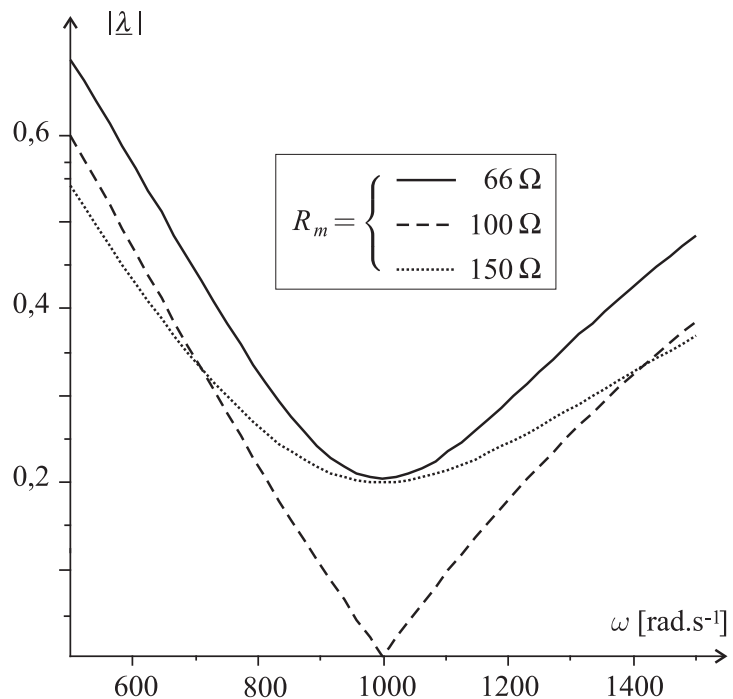


FIGURE 3 – Module du coefficient de réflexion $\underline{\lambda}$ en fonction de la pulsation ω pour différentes valeurs de R_m

FIN DE LA PARTIE I

II. — Les plasmons de surface

Dans toute cette partie on notera i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

II.A. — Propagation d'une onde sur un plan métallique

On considère un plan conducteur infini ($\Pi = xOz$, voir figure 4) plongé dans le vide. Ce plan est parcouru par des ondes électromagnétiques de célérité c caractérisées par une densité surfacique de courant \vec{j}_s indépendante de x , et dont la représentation complexe s'écrit

$$\vec{j}_s = j_{sM} e^{i(Kz - \omega t)} \hat{e}_z$$

où j_{sM} et K sont des constantes réelles et positives.

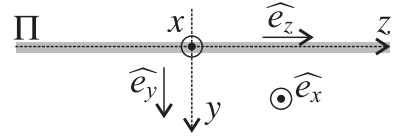


FIGURE 4 – Géométrie du plan

□ 10 — En adaptant l'équation de conservation de la charge au cas de distributions surfaciques, déterminer la densité surfacique de charge $\sigma(z, t)$ associée à \vec{j}_s .

□ 11 — Montrer que le champ électrique \vec{E} créé par la densité de charges σ est de la forme

$$\vec{E} = E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z$$

où E_y et E_z sont deux fonctions des variables y, z et t .

□ 12 — Déterminer la limite de la fonction $E_y(y, z, t)$ lorsque $y \rightarrow 0^+$.

□ 13 — On suppose que $k = \omega/c < K$. Dans la région $y > 0$, déterminer l'expression de $E_y(y, z, t)$ puis celle de $E_z(y, z, t)$ en fonction des paramètres $K, j_{sM}, \epsilon_0, \omega$ et k et des variables y, z et t . Pour cette dernière expression, on pourra calculer $\text{div} \vec{E}$. **On cherchera E_y sous la forme $E_y = f(y) \cdot \exp(i(Kz - \omega t))$ et on commencera par rappeler l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.**

□ 14 — Quelles sont les propriétés de l'onde qui existe dans la région $y > 0$?

On se place dans le cas où le plan est un métal infiniment fin contenant des charges libres sous la forme d'électrons (charge $-e < 0$ et masse m). Le nombre de ces électrons par unité de surface est noté ρ , il est supposé constant. On fait l'hypothèse que ces électrons peuvent se déplacer sans interaction (frottement) avec le réseau cristallin constituant le métal. On suppose enfin que ces électrons restent dans le plan $y = 0$ et que le module de leur vitesse $v = \|\vec{v}\|$ est toujours négligeable devant la célérité de la lumière c .

□ 15 — En écrivant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse d'un électron dans le métal. **(Ecrire la grandeur complexe \vec{v} en fonction de $E_z(y=0, z, t)$, m, e et ω .)** En déduire une expression de j_s .

□ 16 — En déduire la relation de dispersion reliant ω et K pour des ondes libres se propageant dans le plan métallique. De telles ondes sont appelées plasmons de surface. On introduira la pulsation

$$\Omega_s = \frac{\rho e^2}{\epsilon_0 m c} \quad K = \frac{\omega}{c} * \sqrt{1 + \frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}}$$

Montrer que la relation de dispersion peut se mettre sous la forme:

□ 17 — Pourquoi une onde électromagnétique plane progressive incidente, dans le vide, ne peut-elle pas exciter un plasmon de surface sur le métal ? **(Rappeler la relation de dispersion des OPPH dans le vide.)**

II.B. — Excitation de plasmons grâce à la réflexion totale

On considère (figure 5) un demi-cylindre de verre d'indice n . Une onde électromagnétique d'intensité I_e arrive perpendiculairement au plan tangent en A à la surface du verre. Elle pénètre donc le verre en A sans déviation. On suppose de plus qu'elle subit une réflexion totale en O pour ressortir du demi-cylindre en B avec une intensité I_r .

Indication question 18: Exprimer le vecteur d'onde \vec{k} de l'onde réfractée en fonction de $k=|\vec{k}|$ et de l'angle r . Justifier que le champ réfracté a pour expression: $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-k\beta y) \cdot \exp i(k \cdot \sin r \cdot z - \omega t)$

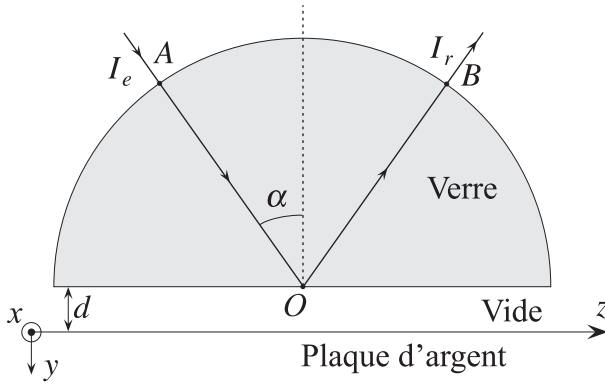


FIGURE 5 – Excitation des plasmons dans la configuration de OTTO

□ 18 — Montrer qu'il existe une onde évanescente dans le vide d'épaisseur d entre le métal et le demi cylindre de verre. On pourra supposer que la loi de la réfraction s'applique encore, mais avec un angle de réfraction r qui est un nombre complexe tel que $\cos r = i\beta$ avec β réel et positif. On écrira la dépendance en z , y , et t du champ électrique en procédant par analogie avec le cas où r est réel.

□ 19 — Montrer que cette onde, qui existe alors dans l'espace vide entre le verre et le métal, peut exciter un plasmon dans le métal.

□ 20 — Déterminer l'expression de la pulsation ω de ce plasmon de surface en fonction de α , n , et Ω_S .

□ 21 — Comment va se manifester l'excitation de plasmons dans le métal ? On pourra par exemple considérer le rayon émergent en B .

Lors d'une expérience on mesure le rapport $g_d(\alpha) = I_r/I_e$ pour différentes incidences α et différentes valeurs de d dans le cas d'une plaque en argent, d'un demi-cylindre en verre, et d'un rayon incident de 633 nm de longueur d'onde. Pour chacune des trois valeurs de d utilisées ($d_1 = 581$ nm ; $d_2 = 918$ nm et $d_3 = 951$ nm), on a reporté sur la figure 6 la courbe $g_d(\alpha)$ expérimentale.

□ 22 — En utilisant les différents résultats de la partie I, proposer une explication qualitative des résultats expérimentaux rassemblés sur la figure 6.

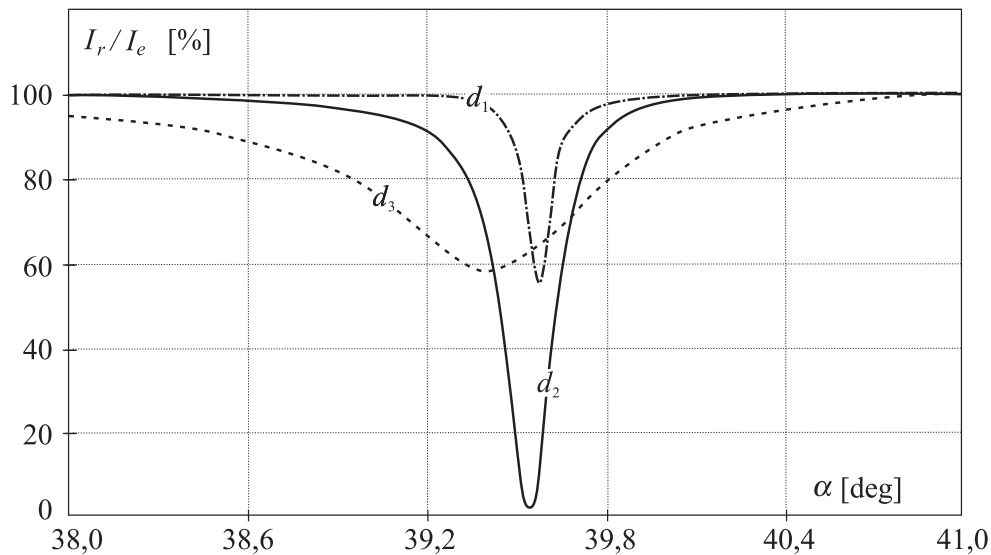


FIGURE 6 – Proportion d'intensité réfléchiée en fonction de l'angle d'incidence. Chaque courbe a été obtenue pour une valeur différente de l'épaisseur de vide d .

Le terme "plasmon" fait référence à la quantification des oscillations des électrons dans un plasma d'un métal. Généralement on désigne par plasma un gaz ionisé. Rappeler les équations de Maxwell dans un plasma dilué. Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique. En considérant une onde plane progressive, transversale, montrer qu'il existe une pulsation en dessous de laquelle l'onde ne peut se propager. On précisera les hypothèses simplificatrices utilisées pour le raisonnement.

□ 23 —

FIN DE LA PARTIE II

FIN DE L'ÉPREUVE