

2013 PARTIE III : REFLEXION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

III.1. Onde incidente

III.1.a. Une onde progressive est le phénomène de propagation d'une vibration ou d'une perturbation.

$$\text{III.1.b. } \vec{k} = k(-\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z) = \frac{\omega}{c}(-\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z)$$

$$\text{III.1.c. } \vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp[-j(\omega t - \vec{k} \cdot \overline{OM})] \vec{e}_x = E_0 \exp[-j(\omega t + k \sin i y - k \cos i z)] \vec{e}_x$$

$$\text{III.1.d. d'après l'équation de Maxwell-Faraday } \vec{\nabla} \times \vec{E}_i(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}_i(M, t)}{\partial t} = j\omega \vec{B}_i(M, t).$$

$$\text{Or : } \vec{\nabla} \times \vec{E}_i = \vec{\nabla} \varphi \times E_0 \exp[-j(\omega t - \varphi)] \vec{e}_x = j\vec{k} \times \vec{E}_i. \text{ D'où la relation de structure : } \vec{B}_i(M, t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_i(M, t).$$

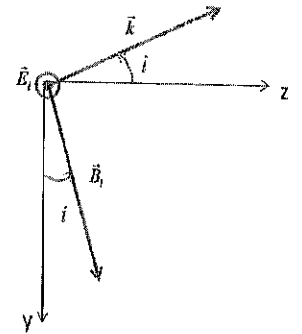
$$\text{III.1.e. } \vec{B}_i(M, t) = \frac{E_0}{c} (\cos i \vec{e}_y + \sin i \vec{e}_z) \exp[-j(\omega t + k \sin i y - k \cos i z)]$$

\vec{B}_i est polarisé dans la direction parallèle au vecteur unitaire $\vec{u}_B = \cos i \vec{e}_y + \sin i \vec{e}_z$.

$$\text{III.1.f. } \vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \times \left(\frac{\vec{k}}{\mu_0 \omega} \times \vec{E} \right) = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \vec{k}$$

Soit : $\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2(\omega t + k \sin i y - k \cos i z) \vec{k}$: Orienté dans la direction de propagation de

$$\text{l'onde incidente. } \langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega} \vec{k} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} (-\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z).$$



III.2. Onde réfléchie

III.2.a. Lois de Descartes : (1) Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.

(2) L'angle de réflexion est égal, en valeur absolue, à l'angle d'incidence.

$$\vec{k}_r = -k(\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z) = -\frac{\omega}{c}(\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z).$$

III.2.b.

$$\vec{E}_r(M, t) = E_{0r} \exp[-j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \overline{OM})] \vec{e}_x = E_{0r} \exp[-j(\omega t + k \sin i y + k \cos i z)] \vec{e}_x$$

$$\text{III.2.c. } \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \times \vec{E}_r = \frac{E_{0r}}{c} (-\cos i \vec{e}_y + \sin i \vec{e}_z) \exp[-j(\omega t + k \sin i y + k \cos i z)]$$

III.2.d. A l'interface des deux milieux, les relations de passage s'écrivent :

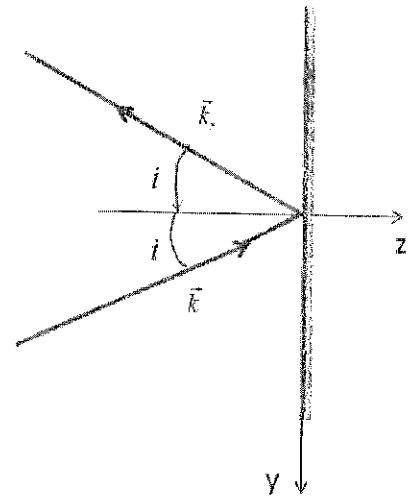
$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (1) \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (2)$$

Dans un conducteur parfait (milieu 2), $\vec{E}_2(M, t) = \vec{0}$ et $\vec{B}_2(M, t) = \vec{0}$.

$$(1) \Rightarrow \vec{0} - (E_0 \vec{e}_x + E_{0r} \vec{e}_x) = \frac{\sigma(0, 0, 0, 0)}{\epsilon_0} \vec{e}_z \Rightarrow E_{0r} = -E_0$$

$$\text{III.2.e. } \vec{R}_r = \frac{E_{0r}^2}{\mu_0 \omega} \cos^2(\omega t + k y \sin i + k z \cos i) \vec{k}_r = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + k y \sin i + k z \cos i) (\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z) \text{ orienté dans la}$$

$$\text{direction de l'onde réfléchie. } \langle \vec{R}_r \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} (\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z).$$



III.3. Onde résultante

$$\text{III.3.a. } \vec{E}_t = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 e^{-j(\omega t + k \sin i y - k \cos i z)} \vec{e}_x - E_0 e^{-j(\omega t + k \sin i y + k \cos i z)} \vec{e}_x = 2jE_0 \sin(k \cos i z) e^{-j(\omega t + k \sin i y)} \vec{e}_x$$

En notation réelle : $\vec{E}_t = 2E_0 \sin(k \cos i z) \sin(\omega t + k \sin i y) \vec{e}_x$

$$\vec{B}_t = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{-j(\omega t + k \sin i y)} \left[(\cos i \vec{e}_y + \sin i \vec{e}_z) e^{j(k \cos i z)} - (-\cos i \vec{e}_y + \sin i \vec{e}_z) e^{-j(k \cos i z)} \right]$$

$$\vec{B}_t = \frac{2E_0}{c} e^{-j(\omega t + k \sin i y)} \left[j \sin(k \cos i z) \sin i \vec{e}_z + \cos(k \cos i z) \cos i \vec{e}_y \right]$$

En notation réelle :

$$\vec{B}_t = \frac{2E_0}{c} \left[\sin(i) \sin(k \cos i z) \sin(\omega t + k \sin i y) \vec{e}_z + \cos(i) \cos(k \cos i z) \cos(\omega t + k \sin i y) \vec{e}_y \right]$$

$$\text{III.3.b. } \vec{R}_t = 2E_0 \sin(k \cos i z) \sin(\Phi) \vec{e}_x \times \frac{2E_0}{\mu_0 c} \left[\sin(i) \sin(k \cos i z) \sin(\Phi) \vec{e}_z + \cos(i) \cos(k \cos i z) \cos(\Phi) \vec{e}_y \right]$$

$$\vec{R}_t = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c} \left[-2 \sin(i) \sin^2(k \cos i z) \sin^2(\Phi) \vec{e}_y + \cos(i) \cos(2k \cos i z) \cos(2\Phi) \vec{e}_z \right]; \text{ avec } \Phi(M, t) = \omega t + k \sin i y$$

$$\langle \vec{R}_t \rangle = -\frac{2E_0^2}{\mu_0 c} \sin(i) \sin^2(k \cos i z) \vec{e}_y = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(i) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda / 2 \cos i}\right) \right) \vec{e}_y$$

- L'onde résultante se propage dans la direction Oy dans le sens des y décroissants à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k \sin i} = \frac{c}{\sin i}$$

- Il y'a interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. Les surfaces d'égale intensité sont des plans

parallèles à (xoy). L'interfrange dans un plan normal à la direction de propagation oy est $I = \frac{\lambda}{2 \cos i}$.

$$\text{VI.1. } \text{MG} : \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 ; \text{MF} : \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{M}\Phi : \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ; \text{MA} : \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{VI.2. } \vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \text{ En régime sinusoïdal : } \frac{|J_D|}{|J_C|} = \frac{\epsilon_0 \omega |E|}{\gamma |E|} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma}$$

Ordre de grandeur : pour le cuivre à 100MHz, $\frac{|J_D|}{|J_C|} = \frac{4\pi\epsilon_0 \nu}{2\gamma} \sim 10^{-10} \ll 1$.

$$\text{VI.3. } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{J} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \text{ D'où : } \vec{\nabla}^2 \vec{J} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} ; \alpha = \mu_0$$

VI.4.

$$\text{IV.4.a. } \frac{\partial^2 \vec{J}(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\mu_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{J}(z, t)}{\partial t} = \vec{0} \quad (3)$$

$$\text{IV.4.b. } \vec{J} = \vec{J}_0 e^{-(z/\delta)} e^{j(z/\delta - \omega t)}. \frac{\partial^2 \vec{J}}{\partial z^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \left(j\gamma\mu_0\omega - \frac{(1+j)^2}{\delta^2} \right) \vec{J} = \vec{0}. \text{ L'expression vérifie l'équation (3) à}$$

condition que : $j\gamma\mu_0\omega - (1+j)^2 / \delta^2 = \gamma\mu_0\omega - 2/\delta^2 = 0$.

$$\text{IV.4.c. } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

IV.4.d. AN : $\delta \approx 9,4 \mu\text{m}$. Valeur trop faible. A très hautes fréquences, le courant est pratiquement surfacique.

IV.5. $\vec{J} = J_0 e^{(-z/\delta)} \cos(z/\delta - \omega t) \vec{e}_y$, $\vec{E} = \frac{J_0}{\gamma} e^{(-z/\delta)} \cos(z/\delta - \omega t) \vec{e}_y$. La puissance volumique instantanée

dissipée par effet Joule et $P(t) = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J_0^2}{\gamma} e^{(-2z/\delta)} \cos^2(z/\delta - \omega t) \vec{e}_y$.

$$\text{Sur une période : } \langle\langle P \rangle\rangle = \iiint_{\text{conducteur}} \frac{J_0^2}{2\gamma} e^{(-2z/\delta)} d\tau = \frac{J_0^2 S}{2\gamma} \int_0^\infty e^{(-2z/\delta)} dz. \quad \langle\langle P \rangle\rangle = \frac{J_0^2 S \delta}{4\gamma}$$

PARTIE V : SUPRACONDUCTIVITE – EFFET MEISNER

V.1.a. Le courant volumique $\vec{J} = -ne\vec{v} = \sigma\vec{E}$ est fini (la densité et la vitesse des charges sont finies). Or $\sigma \rightarrow \infty$ donc $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur du supraconducteur.

V.1.b. $\delta = \left(\frac{m_e}{ne^2 \mu_0} \right)^{1/2}$. AN : Pour le plomb, $\delta \approx 0,53 \mu m$. trop faible.

V.2. MG : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$; MF : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$; MΦ : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$; MA : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$.

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} = -\frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \vec{B}$. \vec{B} est donc solution de

l'équation : $\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \lambda^2 \vec{B} = \vec{0}$. Où : $\lambda = \sqrt{\frac{\mu_0 ne^2}{m_e}} = \frac{1}{\delta}$.

V.3. a. $\frac{d^2 B(z)}{dz^2} - \lambda^2 B(z) = 0 \Rightarrow B(z) = \eta e^{-\lambda z} + \eta' e^{\lambda z}$. $B(\infty) = 0 \Rightarrow \eta' = 0$, $B(0) = B_0 = \eta$. Donc :

$$B(z) = B_0 e^{-\lambda z}.$$

V.3.b. L'effet Meissner consiste en l'expulsion du champ magnétique du volume du supraconducteur. Dans un champ magnétique extérieur, les lignes de champ magnétique ne pénètrent pas dans la pièce supraconductrice. Fait prouvé expérimentalement par le phénomène de lévitation observé à la transition de phase conducteur – supraconducteur.

V.4. $\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = -B_0 \vec{e}_z = \mu_0 \vec{J}_s \times \vec{e}_z \Rightarrow \vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0} \vec{e}_z \times (\vec{J}_s \times \vec{e}_z) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{e}_z \times B_0 \vec{e}_z$. Soit : $\vec{J}_s = \frac{-B_0}{\mu_0} \vec{e}_y$