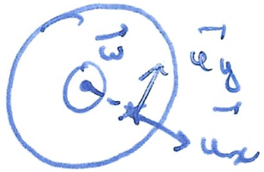
Bille qui tombe dans un manège

① Chute libre sans vitesse initiale dans $R_{manège}$ non galiléen.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$



$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2\vec{HM} = m\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$$

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = -mg\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + m\omega^2\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} - 2m\begin{pmatrix}0\\0\\ \omega\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases}\ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y}\\ \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x}\\ \ddot{z} = -g\end{cases}}$$

Resolution numerique
↳ Voir script Python

② $\underline{u} = x + iy$

$$\ddot{\underline{u}} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \omega^2(\overbrace{x+iy}^{\underline{u}}) + 2\omega(\overbrace{\dot{y} - i\dot{x}}^{-i\dot{\underline{u}}})$$

$$\ddot{\underline{u}} = \omega^2\underline{u} - 2i\dot{\underline{u}}\omega$$

$$\ddot{\underline{u}} + 2i\omega\dot{\underline{u}} - \omega^2\underline{u} = 0$$

↳ eq caractéristique $r^2 + 2i\omega r - \omega^2 = 0$

$\Delta = -4i^2 + 4 = 0$ $\quad r = -i\omega$

$\underline{u}(t) = (At + B)e^{-i\omega t}$, $\dot{\underline{u}}(t) = Ae^{-i\omega t} - i\omega(At+B)e^{-i\omega t}$

CI : $\underline{u}(t=0) = x_0 = B$

$\dot{\underline{u}}(t=0) = 0 = -i\omega B + A$

↳ $A = i\omega x_0$

$$\underline{u}(t) = (i\omega x_0 t + x_0)e^{-i\omega t}$$

$$\boxed{\begin{aligned}x(t) &= Re(\underline{u}(t))\\ x(t) &= x_0[\cos(\omega t) + \omega t\sin(\omega t)]\end{aligned}}$$

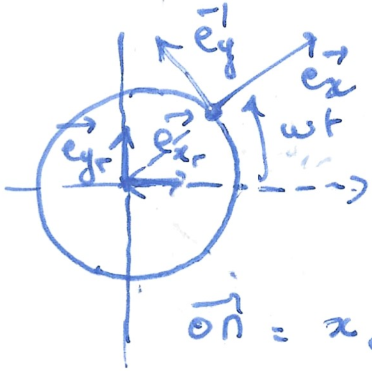
$$\boxed{\begin{aligned}y(t) &= Im(\underline{u}(t))\\ y(t) &= x_0[-\sin(\omega t) + \omega t\cos(\omega t)]\end{aligned}}$$

$$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h}$$

Mvt spiralaire.
(spirale parabolique)

③ On exprime les vecteurs unitaires de la base associée au référentiel du manège en fonction des vecteurs de base du référentiel terrestre

$\vec{e_x} = \cos\omega t\,\vec{e_{x_T}} + \sin\omega t\,\vec{e_{y_T}}$



$\vec{e_y} = -\sin\omega t\,\vec{e_{x_T}} + \cos\omega t\,\vec{e_{y_T}}$

$\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} = x_T\vec{e_{x_T}} + y_T\vec{e_{y_T}}$

$\vec{OM} = x_0\left[\cos(\omega t) + \omega t\sin(\omega t)\right]\left(\cos\omega t\,\vec{e_{x_T}} + \sin\omega t\,\vec{e_{y_T}}\right)$

$+ x_0\left[-\sin(\omega t) + \omega t\cos(\omega t)\right]\left(-\sin(\omega t)\vec{e_{x_T}} + \cos(\omega t)\vec{e_{y_T}}\right)$

$\vec{OM} = x_0\left[\cos^2\omega t\,\vec{e_{x_T}} + \cancel{\omega t\sin\omega t\cos\omega t\,\vec{e_{x_T}}} + \cos\omega t\sin\omega t\,\vec{e_{y_T}} + \omega t\sin^2\omega t\,\vec{e_{y_T}} + \sin^2\omega t\,\vec{e_{x_T}} - \cancel{\omega t\cos\omega t\sin\omega t\,\vec{e_{x_T}}} + \omega t\cos^2\omega t\,\vec{e_{y_T}} - \omega t\sin\omega t\cos\omega t\,\vec{e_{y_T}}\right.$

$\vec{OM} = x_0\left[\vec{e_{x_T}} + \omega t\,\vec{e_{y_T}}\right]$ Mvt dans le plan (x_0, x_T, y_T)

$x_T(t) = x_0$; $y_T(t) = x_0\omega t = v_0 t$; $z_T = -\frac{1}{2}gt^2 + h$

} prévisible mvt parabolique car chute libre avec $v_0 \neq 0$.

Mise en forme du pb numérique

$Y = f(X)$. On prend $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X[3] \\ X[4] \\ X[5] \\ \omega^2 X[0] + 2\omega X[4] \\ \omega^2 X[1] - 2\omega X[3] \\ -g \end{pmatrix} = f(X)$