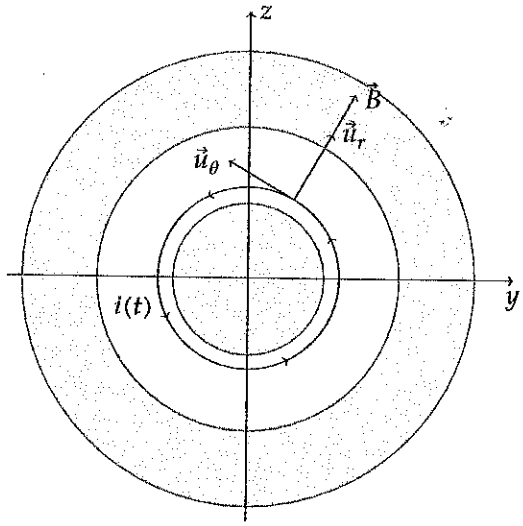
Équations électriques et mécaniques dans le cadre d'un modèle linéaire

. La force de LAPLACE s'exerçant sur un circuit C filiforme est $\boxed{\vec{F}_L = i(t)\int_C \mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}}$.



Pour le système étudié : $\begin{cases} \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\ell\vec{u}_\theta \\ \vec{B} = B_e\vec{u}_r \end{cases}$.

La force de LAPLACE est donc : $\vec{F}_L = i(t)\int_C \mathrm{d}\ell B_e \vec{u}_x$.

En notant $\ell = \int_C \mathrm{d}\ell$ la longueur totale du fil : $\boxed{\vec{F}_L = -\ell B_e i(t)\vec{u}_x}$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'équipage mobile s'écrit : $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_x = \vec{F}_r + \vec{F}_f + \vec{F}_L$

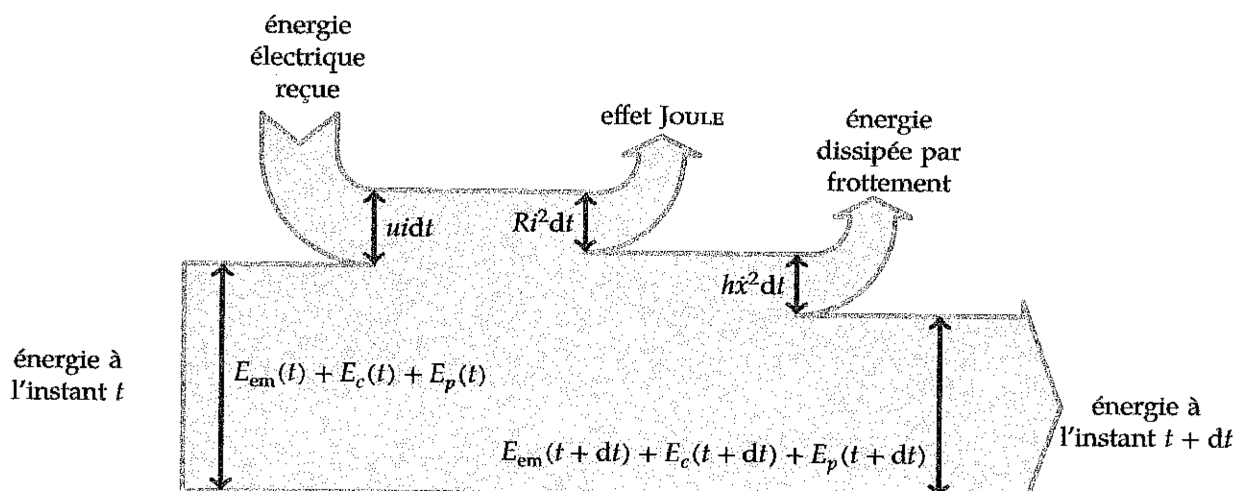
Donc, en projetant cette équation sur $\vec{u}_x$: $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -Kx(t) - h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \ell B_e i(t)$

Donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{K}{m}x(t) = -\frac{\ell B_e}{m}i(t)\ (4)}$

- La bobine est en mouvement dans champ magnétique permanent dans l'entrefer ;
- la bobine est aussi siège d'un phénomène d'auto-induction ;

$\boxed{\text{Une force électromotrice est induite dans la bobine.}}$

On réalise un bilan d'énergie pour le haut-parleur entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$:



$$\begin{cases} u(t)i(t)\mathrm{d}t & \text{énergie électrique reçue par le haut-parleur} \\ Ri^2(t)\mathrm{d}t & \text{énergie dissipée par effet Joule} \\ h\dot{x}^2\mathrm{d}t & \text{énergie dissipée par frottement} \\ \mathrm{d}E_c & \text{variation d'énergie cinétique de l'équipage mobile} \\ \mathrm{d}E_{em} & \text{variation de l'énergie magnétique} \\ \mathrm{d}E_p & \text{variation de l'énergie potentielle élastique} \end{cases}$$

Le bilan d'énergie s'écrit :

$$\mathrm{d}E_{em} + \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p = u(t)i(t)\mathrm{d}t - Ri^2(t)\mathrm{d}t - h\dot{x}^2(t)\mathrm{d}t$$

Or $u(t) = Ri(t) - e(t)$, donc $\boxed{-e(t)i(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}E_{em} + \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p + h\dot{x}^2(t)\mathrm{d}t}$

On multiplie alors l'équation mécanique par la vitesse :

$$m\dot{x}\ddot{x} + h\dot{x}^2 + K\dot{x}x = F_L\dot{x}$$

D'où :

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + h\dot{x}^2\mathrm{d}t + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Kx^2\right) = F_L\dot{x}\mathrm{d}t$$

Avec $\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 & \text{énergie cinétique} \\ E_p = \frac{1}{2}Kx^2 & \text{énergie potentielle élastique} \\ \delta W_L = F_L\dot{x}\mathrm{d}t & \text{travail de la force de Laplace} \end{cases}$

Donc $\boxed{\mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p + h\dot{x}^2\mathrm{d}t = \delta W_L}$

En comparant les deux bilans d'énergie : $-e(t)i(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}E_{em} + \delta W_L$

En notant $\delta W_{em} = -e(t)i(t)\mathrm{d}t$ le travail de la force contre-électromotrice : $\boxed{\delta W_{em} = \delta W_L + \mathrm{d}E_{em} \ (5)}$

5. L'énergie magnétique est $E_{em} = \frac{1}{2}Li^2 + E_{em0}$, donc $\mathrm{d}E_{em} = Li\mathrm{d}i$.

Le travail de la force de Laplace est $\delta W_L = -\ell B_e i\dot{x}\mathrm{d}t$

Donc $-e(t)i(t)\mathrm{d}t = -\ell B_e i(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + Li(t)\mathrm{d}i$

Donc $\boxed{e(t) = \ell B_e\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

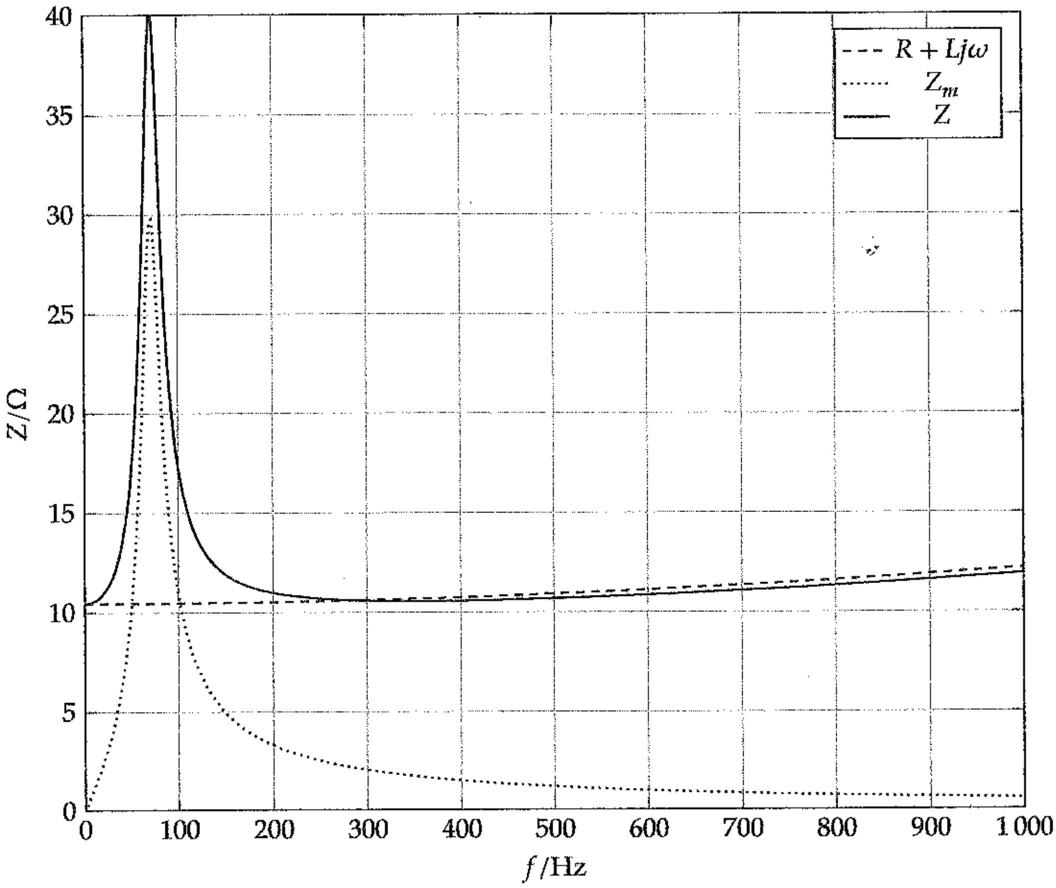
Avec $u(t) = Ri(t) - e(t)$: $\boxed{u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \ell B_e\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ (6)}$

En notation complexe, les équations deviennent : $\boxed{\begin{cases} \left[\left(-\omega^2 + \frac{K}{m}\right) + j\omega\frac{h}{m}\right]\underline{x} = -\frac{\ell B_e}{M}\underline{i} \\ \underline{u} = (R + Lj\omega)\,\underline{i} - \ell B_e j\omega\underline{x} \end{cases}}$

6. L'impédance du circuit est : $\underline{Z}(j\omega) = R + Lj\omega + \dfrac{1}{C_m j\omega + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{L_m j\omega}}$

Donc $\underline{Z}(j\omega) = R + Lj\omega + \dfrac{R_m}{1 + jR_m\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)}$

On pose $\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_m C_m}} \\ Q = R_m\sqrt{\dfrac{C_m}{L_m}} \end{cases}$, alors : $\underline{Z}(j\omega) = R + Lj\omega + \dfrac{R_m}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$. Avec $\begin{cases} \omega_0 = 447\,\mathrm{rad/s} \\ f_0 = 71\,\mathrm{Hz} \\ Q = 3{,}7 \\ R_m = 30\,\Omega \end{cases}$



L'impédance $\underline{Z}_m$ a une structure de filtre passe-bande de fréquence centrale f_0 et de facteur de qualité Q. $|\underline{Z}_m|(f)$ admet donc un maximum en f_0.

Comme le montre le graphique des impédances, $|R + Lj\omega|$ varie peu dans la plage de fréquence $[0\,\mathrm{Hz}; 1000\,\mathrm{Hz}]$. L'impédance $|\underline{Z}|$ admet donc un maximum pour une fréquence proche de f_0.

$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}$. Donc $\boxed{f_0 = 71\,\mathrm{Hz}}$