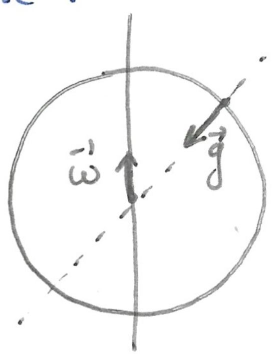
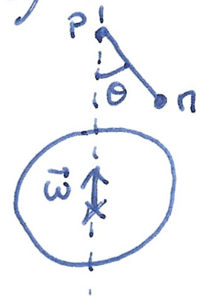
Pendule de Foucault

1) La pesanteur correspond à la valeur du champ de gravitation au niveau du sol à laquelle s'ajoute l'accélération d'inertie d'entraînement liée à la rotation de la Terre si on considère les effets non galiléens liés à la rotation de celle-ci sur elle même.

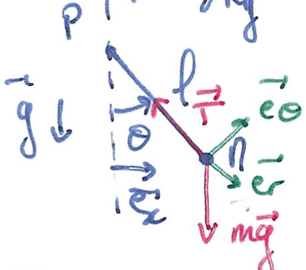


2) g dépend de la latitude (si on considère l'accélération d'inertie d'entraînement) et la Terre n'est pas parfaitement sphérique.

3) Dans le référentiel géocentrique le point P est fixe. L'étude se ramène au cas classique du pendule simple observé dans un référentiel galiléen



$$m\left(\frac{d^2\vec{PM}}{dt^2}\right)_{R_g} = m\vec{g} + \vec{T}$$



$\vec{PM} = \ell \vec{e_r} \Rightarrow \frac{d\vec{PM}}{dt} = \ell\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\frac{d^2\vec{PM}}{dt^2} = \ell\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

$m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$ et $\vec{T} = -T\vec{e_r}$

$m(\ell\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\vec{e_r}) = mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}) - T\vec{e_r}$

$/\vec{e_\theta}$ $\quad m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$

Petites oscillations, $\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{\ell}$

+ Trajectoire horizontale $\quad \ddot{\theta} \approx \frac{\ddot{x}}{\ell}$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0}$$

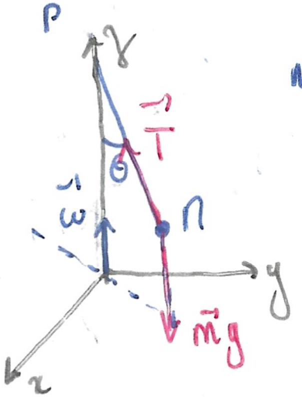
$x(t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$

Trajectoire approximativement une droite

Période : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} = 2\pi\sqrt{\frac{67}{9{,}8}} = \underline{16{,}4\,s}$

4) Le référentiel terrestre est <u>NON</u> galiléen (rotation par rapport à R_g galiléen)

PFD sur M dans R_T



$$m\left(\frac{d^2\vec{PM}}{dt^2}\right)_{R_T} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\wedge\left(\vec{v}_M\right)_{R_T}$$

$$\left(\vec{v}_M\right)_{R_T} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \underbrace{\dot{z}\vec{e}_z}_{\simeq 0}$$

$$\vec{T} = T\frac{\vec{MP}}{\|\vec{MP}\|} = \frac{T}{\ell}\left(-x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + (z-\ell)\vec{e}_z\right)$$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \underbrace{\ddot{z}}_{\simeq 0}\end{pmatrix} = \frac{T}{\ell}\begin{pmatrix}-x\\ -y\\ \underbrace{z-\ell}_{z \simeq 0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{pmatrix} - 2m\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \underbrace{\dot{z}}_{\simeq 0}\end{pmatrix}$$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{Tx}{\ell}\\ -\frac{Ty}{\ell}\\ T\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{pmatrix} - 2m\begin{pmatrix}-\omega\dot{y}\\ +\omega\dot{x}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{Tx}{\ell} + 2m\omega\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{Ty}{\ell} - 2m\omega\dot{x} \\ T = mg \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{gx}{\ell} + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{gy}{\ell} - 2\omega\dot{x} \end{cases}}$$

5) On pose $\underline{u} = x + jy \rightarrow \dot{\underline{u}} = \dot{x} + j\dot{y}$

$\ddot{\underline{u}} = \ddot{x} + j\ddot{y}$

$$\ddot{\underline{u}} = \left(-\frac{gx}{\ell} + 2\omega\dot{y}\right) + j\left(-\frac{gy}{\ell} - 2\omega\dot{x}\right)$$

$$\ddot{\underline{u}} = -2\omega j\dot{x} + 2\omega\dot{y} - \frac{g}{\ell}(x+jy)$$

$$\ddot{\underline{u}} = 2\omega(-j\dot{x} + \dot{y}) - \frac{g}{\ell}(x+jy)$$

$$\ddot{\underline{u}} = -2\omega j\underbrace{(\dot{x} + j\dot{y})}_{} - \frac{g}{\ell}(x+jy)$$

$$\boxed{\ddot{\underline{u}} + 2\omega j\dot{\underline{u}} + \frac{g}{\ell}\underline{u} = 0}$$

Polynome caractéristique :

$$r^2 + 2\omega jr + \frac{g}{\ell} = 0$$

$$\Delta = -4\omega^2 - 4\frac{g}{\ell} < 0$$

$$r_\pm = \frac{-2\omega j \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\underline{u}(t) = A\exp(j r_+ t) + B\exp(j r_- t)$$

$$\underline{u}(t) = A\exp\left(-\omega j t + j\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{\ell}}\, t\right) + B\exp\left(-\omega j t - j\sqrt{\omega^2 - \frac{g}{\ell}}\right)$$

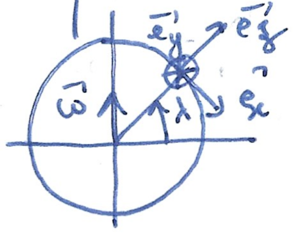
$$\underline{u}(t) = e^{-j\omega t}\left(A e^{j\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{\ell}}\, t} + B e^{-j\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{\ell}}\, t}\right)$$

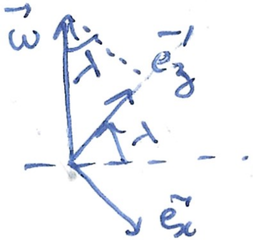
$$\boxed{\underline{u}(t) = \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{rotation du plan d'oscillation}}\underbrace{\left(\alpha \sin\left[\left(\omega^2 + \frac{g}{\ell}\right) t\right] + \beta\cos\left[\left(\omega^2 + \frac{g}{\ell}\right) t\right]\right)}_{\text{oscillation}}}$$

Rotation du plan d'oscillation à la pulsation ω

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{24H}$. Rotation dans $\underline{\text{le sens horaire}}$.

6) Si le pendule est à Paris $\vec{\omega} = \sin\lambda\vec{e_y} - \cos\lambda\vec{e_x}$





La force de Coriolis s'écrit alors

$$\vec{f_{ic}} = -2m\begin{pmatrix} -\cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \simeq 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f_{ic}} = 2m\begin{pmatrix} -\sin\lambda\,\dot{y} \\ \sin\lambda\,\dot{x} \\ -\cos\lambda\,\dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{f_{ic}} = 2m\left(\sin\lambda\,\dot{y}\,\vec{e_x} - \sin\lambda\,\dot{x}\,\vec{e_y} + \cos\lambda\,\dot{y}\,\vec{e_z}\right)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{Tx}{\ell} + 2m\sin\lambda\,\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{Ty}{\ell} + 2m\sin\lambda\,\dot{x} \\ 0 = T - mg + 2m\cos\lambda\,\dot{y}\,\vec{e_z} \end{cases}$$

Or $\|m\vec{g}\| \gg \|\vec{f_{ic}}\|$

Donc $\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{gx}{\ell} + 2\omega\sin\lambda\,\dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{gy}{\ell} - 2\omega\sin\lambda\,\dot{x} \end{cases}$

On retrouve donc le même système d'équations différentielles en posant

$$\boxed{\Omega = \omega \sin \lambda}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{24}{\sin\left(48 + \frac{51}{60}\right)}$$

$T = 31,87\,h \Rightarrow \underline{T = 31\,h \text{ et } 52\,min}$

La difference peut être expliquée par les différentes approximations effectuées pour ce calcul.