



Rappel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Exercice 1 Distribution des vitesses dans une enceinte gazeuse

On considère un gaz parfait. L'énergie d'une particule qui compose ce gaz se réduit donc à son énergie cinétique et la distribution des vitesses vérifie une loi de Boltzmann.

1. Exprimer la probabilité de trouver une particule dont la composante selon x de la vitesse est comprise entre v_x et $v_x + dv_x$.
2. En déduire la loi dite de « Maxwell-Boltzmann » décrivant la distribution des vitesses des particules d'un gaz parfait.
3. Calculer la vitesse moyenne des particules dans la direction x puis la moyenne de v_x^2 .
4. En déduire l'expression de l'énergie cinétique moyenne des particules du gaz. Commenter.
5. On rappelle que la vitesse quadratique moyenne des particules est définie par $v^{*2} = \langle (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle)^2 \rangle$. Justifier que la température apparaît comme une mesure des fluctuations des vitesses des atomes dans un gaz classique.

Exercice 2 Oscillateur harmonique quantique

Dans une molécule diatomique comme le diazote N_2 , la distance entre les deux atomes peut évoluer au cours du temps, et une énergie est associée à ce degré de liberté. Dans la limite des petits déplacements relatifs, on peut considérer ce système comme un oscillateur harmonique caractérisé par une pulsation $\omega = 2\pi\nu$. Un traitement quantique de ces vibrations conduit à un ensemble d'états de vibration, repérés par un entier n , dont les niveaux d'énergie sont :

$$\mathcal{E}(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad n \in \mathbb{N}$$

Les niveaux d'énergie sont non dégénérés. On s'intéresse à l'énergie de vibration pour une telle molécule dans un gaz à la température T .

1. Qualifier ce type de spectre de niveaux d'énergie.
2. Rappeler la probabilité d'observer un état d'énergie $\mathcal{E}(n)$. On fera apparaître la fonction de partition définie par $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\mathcal{E}(n)}$, où $\beta = \frac{1}{k_B T}$.
3. Montrer que l'on peut écrire l'énergie de vibration sous la forme $\langle \mathcal{E} \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$, puis appliquer cette relation pour exprimer explicitement $\langle \mathcal{E} \rangle$ en fonction de \hbar , ω , k_B et T . Calculer la valeur numérique à 300 K et commenter.
4. Montrer que l'écart-type sur l'énergie peut s'écrire $\sigma^2(\mathcal{E}) = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = -\frac{\partial \langle \mathcal{E} \rangle}{\partial \beta}$ et effectuer le calcul explicite.
5. Exprimer l'ordre de grandeur des fluctuations relatives en énergie à 300 K.

Données : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K et $\nu = 7,08 \times 10^{13}$ Hz

**Exercice 3** Capacité thermique d'un solide dans le modèle d'Einstein classique ou quantique

1. Rappeler qualitativement l'origine de la capacité thermique d'un cristal.
2. Quelles sont les hypothèses du modèle d'Einstein classique ?
3. Dans le cadre de ce modèle, exprimer l'énergie interne, puis la capacité thermique molaire du cristal.

Dans le modèle d'Einstein quantique, chaque oscillateur est traité par la mécanique quantique. Ainsi, les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique quantique sont non dégénérés, chaque état est repéré par un entier $n \in \mathbb{N}$ et l'énergie correspondante s'écrit $\mathcal{E}_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ pour un oscillateur de pulsation ω .

4. exprimer l'énergie thermique moyenne d'un oscillateur harmonique quantique.
5. En déduire l'expression de l'énergie interne du cristal puis sa capacité thermique molaire.
6. Tracer l'allure des graphes de la capacité thermique molaire d'un cristal dans le cadre du modèle d'Einstein classique et dans le cadre du modèle d'Einstein quantique. Discuter des écarts entre ces deux modèles.

Exercice 4 Suspension colloïdale

Un milieu fluide de température uniforme T et de masse volumique μ_f contient des particules solides en suspension (appelées colloïdes) diluées. Cette solution est soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Les colloïdes sont sphériques de rayon a et de masse m . On note $n = n(z)\frac{\delta N}{\delta V}$ leur nombre par unité de volume à l'altitude z . On nommera "concentration" cette grandeur. Les colloïdes suivent la loi de Boltzmann.

Pour les applications numériques, on considèrera des colloïdes en or de masse volumique $\mu = 19,30 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $a = 50 \text{ nm}$. La solution préparée est de concentration initiale $n_i 1,0 \times 10^{18}$ homogène dans de l'eau à $T = 300 \text{ K}$.

1. Exprimer $n(z)$ en identifiant une longueur caractéristique L . Calculer L .
2. Exprimer δp la probabilité pour une particule de se trouver entre les altitudes $[z, z + dz]$ dans le cas d'une solution de hauteur $H \gg L$.
3. La comparaison du rapport $L(a) = a$ à l'unité définit une frontière entre un état de suspension et celui de sédiment. Exprimer, en fonction de $k_B T$ et des masses volumiques, la taille critique a_c associée à cette frontière. Exprimer le rapport $\frac{L}{a}$ en fonction du rapport $\frac{a}{a_c}$. Montrer que $\frac{L}{a}$ est aussi le rapport de deux énergies que l'on précisera. Justifier le choix du critère adopté et calculer a_c .
4. L'utilisation de la loi de Boltzmann suppose que les colloïdes sont indépendants entre-eux. Indiquer la condition portant sur a et n pour que cette hypothèse soit valable. Est-elle satisfaite ici ?
5. La définition de la concentration locale $n(z)$, donnée dans l'introduction, présuppose une uniformité des grandeurs à l'échelle δV . Indiquer comment doivent alors se situer la longueur caractéristique L et l'extension δz de l'élément de volume δV .
6. Indiquer quelle autre contrainte borne δz cette fois inférieurement.
7. Les particules subissent de la part du fluide une force de frottement visqueux $\vec{f} = -6\pi\eta a \vec{v}$ où η est la viscosité du fluide et \vec{v} la vitesse du colloïde par rapport au fluide. Exprimer le temps caractéristique τ nécessaire à l'obtention du profil d'équilibre de la concentration dans une solution de hauteur H . Estimer τ pour de l'eau de viscosité $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $H = 10 \text{ cm}$. Quelle conclusion pratique doit-on en tirer ?

Exercice 5 Paramagnétisme de spins 1/2

On cherche à expliquer l'apparition d'une aimantation lorsqu'on place un ensemble de spins 1/2 typiquement un ensemble d'électrons dans un champ magnétique extérieur. On suppose que ces spins 1/2 n'interagissent pas entre-eux.

1. Exprimer en fonction de \hbar les deux valeurs possibles pour la projection σ_z du moment cinétique de spin selon l'axe (Oz) .
2. Dans le cas d'une boucle de courant classique, associée à un électron (de charge q_e , de masse m_e) sur un orbite circulaire, retrouver la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique : $m_z = \gamma_c L_z$. Exprimer γ_c en fonction de q_e et m_e . On pourra introduire la vitesse angulaire ω et le rayon r de l'orbite.
3. On admet que le rapport gyromagnétique γ pour le spin est le double du rapport obtenu précédemment pour un moment cinétique orbital. Exprimer les deux valeurs possibles du moment magnétique m_z pour un électron (de spin 1/2).



On considère un champ magnétique extérieur constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

4. Exprimer les deux niveaux d'énergie pour chaque électron dans ce champ magnétique extérieur.
5. Quelles sont les probabilités d'occupation de ces deux niveaux à la température T ?
6. Exprimer le moment dipolaire magnétique moyen $\langle m_z \rangle$, puis, pour n électrons par unité de volume, l'aimantation \vec{M} obtenue. (L'aimantation est la densité volumique de moment magnétique dipolaire). On utilisera $\mu_B = \frac{|q_e|\hbar}{2m_e}$ (magnéton de Bohr).

Pour des hautes températures, on obtient une aimantation proportionnelle au champ magnétique.

1. Définir une température caractéristique T_c et la notion de "hautes températures".
2. Exprimer alors la susceptibilité magnétique χ_M définie par $\vec{M} = \frac{\chi_M}{\mu_0} \vec{B}$.