Élements de physique statistique

1

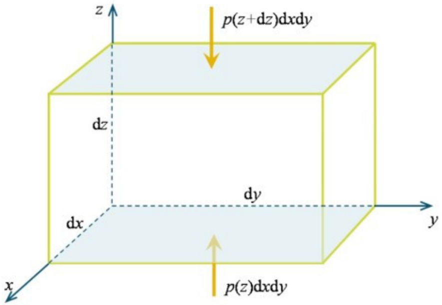
Loi de Boltzmann

Position du problème

On modélise l'atmosphère comme un gaz parfait dont le champ de pression ne dépend que de l'altitude z et dont la température est constante pour tout z. La pression $P(z=0) = 1\,\text{bar}$.

Quelle est la pression au sommet du Mont Blanc ?
Comment se répartissent les particules qui composent l'atmosphère ?

Relation fondamentale de la statique des fluides



On considère un fluide de masse volumique ρ à l'équilibre dans un référentiel galiléen et plongé dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. Un élément de ce fluide, de volume $\mathrm{d}\tau$ est soumis à son poids ainsi qu'aux forces de pression exercées par le fluide environnant.

1. Établir la relation fondamentale de la statique des fluides.

Atmosphère isotherme

2. Détermine l'expression de $P(z)$. En déduire la pression en haut du Mont-Blanc dans le modèle de l'atmosphère isotherme.

On peut critiquer l'extrême simplicité de ce modèle et en particulier prendre en compte le gradient de température. (modèle polytropique de l'atmosphère)

3. On considère que la température décroit de 1 °C tous les 200 m. Déterminer de nouveau la pression en haut du Mont-Blanc et comparer avec la prévision obtenue en exploitant le modèle de l'atmosphère isotherme.

Dans la suite on considère le modèle de l'atmosphère isotherme. On suppose de plus que toutes les particules de l'atmosphère sont identiques de masse $m = \dfrac{M}{N_a}$.

4. Exprimer le nombre $\mathrm{d}N(z)$ de particules comprises entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$ dans une colonne d'atmosphère de section S.
5. On note h la hauteur totale de l'atmosphère. Exprimer le nombre total de particules dans une colonne de section S.
6. En déduire que la probabilité $\mathrm{d}p(z)$ pour une particule de se trouver entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathrm{d}p(z) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_p}{k_B T}\right) \mathrm{d}z$$

Loi de Boltzmann

On considère un système à l'équilibre avec un thermostat de température T. La probabilité pour une particule d'occuper l'état d'énergie $\mathcal{E}$ est proportionnelle au **facteur de Boltzmann** $\exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$

Influence de la température :

On considère un gaz parfait de particules de masse m à l'équilibre avec un thermostat T. On note h la hauteur de la colonne de gaz et $T_0 = \frac{mgh}{k_B}$.

1. Étudier la répartition des particules de gaz dans le cas où $T \ll T_0$ et $T \gg T_0$.
2. Considérer le cas de l'atmosphère.

2

Systèmes à spectre discret d'énergie

On considère un système constitué de N particules indépendantes en équilibre avec un thermostat à la température T. Le spectre des niveaux d'énergie accessibles est discret (système quantique). Les niveaux d'énergie accessibles sont non dégénérées.

Exemple : Des particules dans un puits de potentiel.

1. Exprimer la probabilité d'occupation d'un état d'énergie E_i par une particule.
2. On appelle « population » de l'état d'énergie E_i le nombre moyen $< N_i >$ de particules occupant l'état d'énergie E_i. Exprimer $< N_i >$.

Au cours du temps le nombre exact de particules dans l'état d'énergie E_i n'est pas toujours égal à $< N_i >$. L'écart-type associé aux fluctuations statistiques de N vérifie $\sigma(N_i) = \dfrac{< N_i >}{\sqrt{N_i}}$.

3. Que peut-on dire de ces fluctuations pour un système macroscopique.
4. Comparer les populations $< N_i >$ et $< N_j >$ de deux états d'énergies E_i et $E_j > E_i$ en fonction de la température.
5. Déterminer l'énergie moyenne d'une particule dans le système puis en déduire l'énergie moyenne du système de N particules.
6. Quelle relation existe-t-il entre les fluctuations d'énergie d'une particule, caractérisées par l'écart-type $\sigma(E_{\text{part}})$ et les fluctuations d'énergie du système total (N particules indépendantes), caractérisées par l'écart-type $\sigma(E_{\text{tot}})$?
7. En déduire que les fluctuations relatives de l'énergie régressent lorsque la taille du système augmente. Que peut-on dire pour un système macroscopique ?

3

Système à deux niveaux d'énergie

1. Citer quelques exemples de systèmes pouvant être modélisé par un système à 2 niveaux d'énergie.
2. Déterminer la population occupant le niveau d'énergie $E_1 = -\mathcal{E}$ et la population occupant le niveau d'énergie $E_2 = +\mathcal{E}$. Commenter l'évolution de ces populations en fonction de la température.
3. Déterminer l'énergie moyenne du système.
4. Déterminer la capacité thermique C du système.
5. On pose $C^* = \dfrac{C}{Nk_B}$ et $T^* = \dfrac{k_B T}{\mathcal{E}}$. Déterminer la dimension de C^* et de T^*.
6. Tracer C^* en fonction de T^* sur le domaine $[0, 10]$ et analyser physiquement la forme de la courbe.
7. Exprimer les fluctuations d'énergie en fonction de C, k_B et T.

4

Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

Approximation classique de la loi de Boltzmann

Lorsque les niveaux d'énergie $E_1 < E_2 < \ldots < E_n < \ldots$ des particules sont très serrés, c'est à dire que leurs écarts sont faibles devant l'énergie d'agitation thermique $k_B T$, on peut négliger la quantification de l'énergie et considérer que l'énergie varie de manière continue.

Dans cette approximation, on s'intéresse à la probabilité pour une particule d'avoir son énergie comprise dans l'intervalle $[E, E + \mathrm{d}E]$. D'après la loi de Boltzmann cette probabilité s'écrit :

$$\mathrm{d}p(E) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

avec :

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \mathrm{d}E$$

Théorème d'équipartition de l'énergie

Définition

Un degré de liberté X est dit quadratique si l'énergie de la particule est une fonction quadratique de X, c'est à dire :

$$\mathcal{E} = aX^2 + cte$$

Loi de Boltzmann associé à un degré de liberté quadratique

Soit X un degré de liberté quadratique, et aX^2 sa contribution à l'énergie de la particule.
Pour un système classique, la probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $[X, X + \ X]$ s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{d}p(X) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{aX^2}{k_B T}\right) \text{ avec } Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-aX^2}{k_B T}\right) \mathrm{d}X$$

Énoncé

Pour chaque contribution quadratique à l'énergie d'un système de la forme aX^2, l'énergie moyenne associée vaut :

$$< aX^2 >= \frac{1}{2} k_B T$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

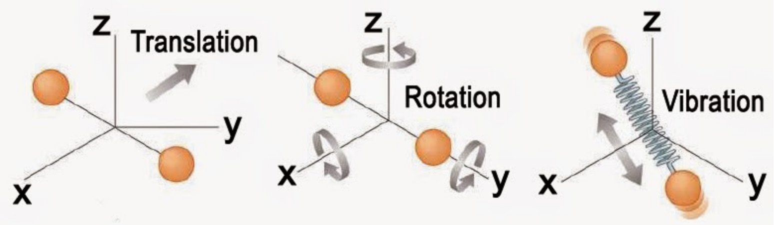
. . . .

Étude d'un gaz parfait monoatomique en équilibre avec un thermostat

1. Exprimer l'énergie moyenne d'un gaz parfait monoatomique constitué de N particules isolées et en déduire l'expression de son énergie interne.
2. Déterminer la capacité thermique à volume constant C_V puis la capacité thermique à pression constante C_p du gaz. En déduire la valeur de γ pour un gaz monoatomique.

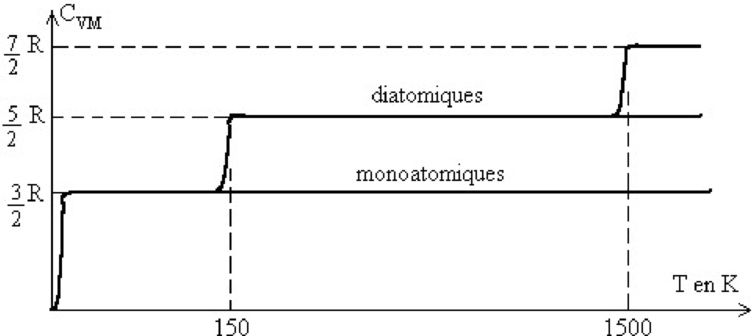
Étude d'un gaz parfait diatomique en équilibre avec un thermostat

On modélise une molécule diatomique par un système de deux masses ponctuelles identiques distantes de r l'une de l'autre.



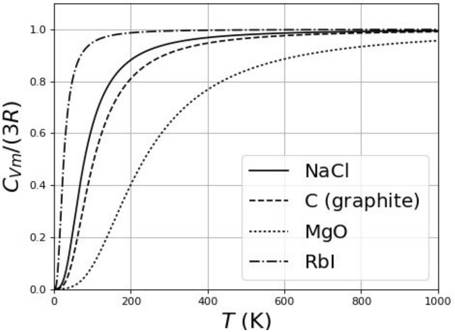
1. Identifier les degrés de liberté de cette molécule et associer une énergie à chaque degré.
2. À température ambiante, l'énergie de vibration est négligeable devant les autres termes quadratiques. Exprimer l'énergie moyenne d'un gaz parfait monoatomique constitué de N particules isolées et en déduire l'expression de son énergie interne.

3. Déterminer la capacité thermique molaire à volume constant $C_{V,m}$ puis la capacité thermique molaire à pression constante $C_{p,m}$ du gaz. En déduire la valeur de γ pour un gaz diatomique à température ambiante
4. La figure ci-dessous représente l'évolution de la capacité thermique molaire à volume constante d'un gaz en fonction de T. Interpréter la figure.



Le modèle classique d'Einstein

Dans le modèle classique d'Einstein, on considère que les vibrations des différents atomes sont indépendantes les unes des autres. Un cristal comportant N atomes est alors modélisé par un ensemble de N oscillateurs harmoniques classiques indépendants à 3 dimensions.



Les résultats expérimentaux sont-ils compatibles avec le modèle classique d'Einstein ?