



MP* Révisions d'optique géométrique de MPSI

Exercice 1 Fibre optique

Une fibre optique est généralement constituée d'un cœur de rayon a dont l'indice n varie avec la distance r à l'axe optique, et d'une gaine d'indice constant n_2 . On suppose que :

$$\begin{aligned} n^2(r) &= n_1^2 \left(1 - 2\Delta \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right) && \text{pour } r < a \\ n^2(r) &= n_2^2 && \text{pour } a < r < b \end{aligned}$$

avec $n_2 < n_1$, α une constante positive, b le rayon extérieur de la gaine et $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$.

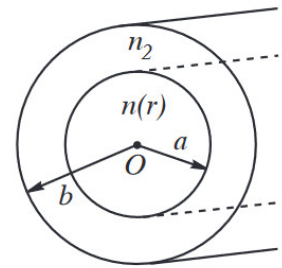


FIGURE 1 – Fibre optique

Dans la pratique, n_1 et n_2 ont des valeurs très voisines et $\Delta \approx 1 \times 10^{-2} \ll 1$.

1. Représenter $n = f(r)$ pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = +\infty$.

Les pertes par transmission (notées X) sont exprimées en $\text{dB} \cdot \text{km}^{-1}$. On rappelle que $X_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$, avec P_1 la puissance optique à l'entrée de la fibre et P_2 la puissance optique au bout d'un kilomètre de parcours. Vers 1970, l'atténuation était de $10 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$. Actuellement on arrive à $5 \times 10^{-3} \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$.

2. Dans les deux cas exprimer en % les pertes au bout d'un kilomètre.

On envisage le cas d'une fibre optique à saut d'indice ($\alpha = \infty$). Le plan d'incidence d'un rayon SI se propageant dans l'air et arrivant sur la fibre est le plan du schéma ci-contre.

On appelle ouverture numérique (O.N.) la quantité $\sin \theta_a$.

3. Montrer que si θ_i reste inférieur à un angle θ_a , un rayon peut être guidé dans le cœur.
4. Exprimer l'O.N. en fonction de n_1 et Δ .
5. Calculer l'O.N. pour $\Delta = 1 \times 10^{-2}$ et $n_1 = 1,5$.

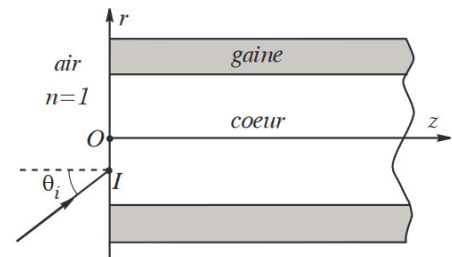


FIGURE 2 – Fibre à saut d'indice

Une impulsion lumineuse arrive à $t = 0$, au point O ($r = 0$) sous la forme d'un faisceau conique convergent, de demi-angle au sommet θ_a .

6. Pour une fibre optique de longueur ℓ , exprimer l'élargissement temporel Δt de cette impulsion à la sortie de la fibre en fonction de ℓ , n_1 , c et Δ .
7. Calculer Δt pour $\ell = 1 \text{ km}$, $\Delta = 1 \times 10^{-2}$ et $n_1 = 1,5$.

On envoie à l'entrée de la fibre des impulsions très brèves de durée δT avec une période T .

8. Quelle est la valeur minimale de T pour que les impulsions soient séparées à la sortie de la fibre ?
9. Quel est le débit binaire en bits par seconde (b/s) ? Comparer au standard téléphone fixe (64 kb/s), ou ADSL (4 Gb/s).

**Exercice 2** Observation des raies d'émission de l'hydrogène

Pour observer au lycée le spectre visible de la lumière émise par une lampe à vapeur d'hydrogène, on utilise parfois un spectromètre à prisme.

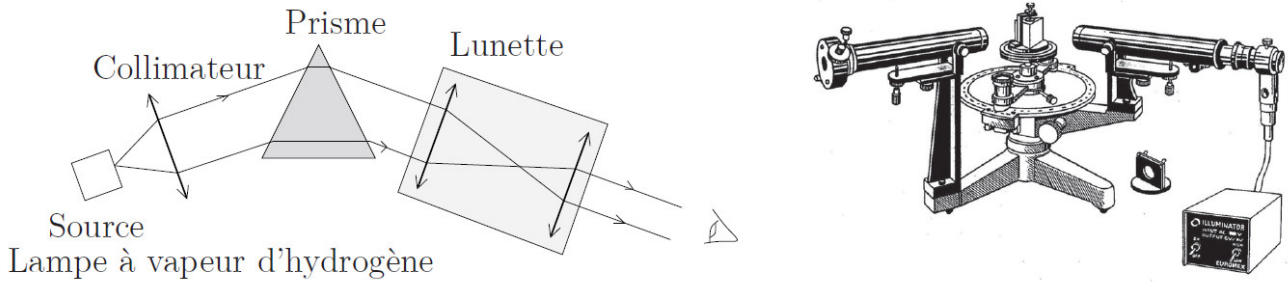


FIGURE 3 – Spectromètre à prisme

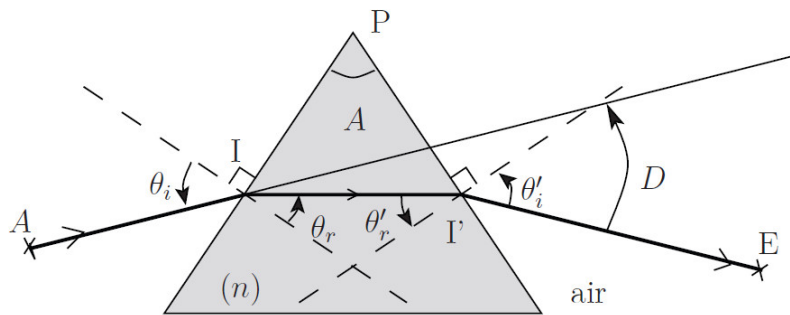


FIGURE 4 – Déviation et angles dans un prisme

Le prisme est réalisé dans un milieu solide transparent d'indice de réfraction n , d'arête P et d'angle au sommet $A = \pi/3$. Le prisme est dans l'air d'indice de réfraction 1.

On étudie le trajet d'un rayon lumineux de longueur d'onde λ issu du faisceau parallèle incident émis par la source, contenu dans le plan de la figure perpendiculairement à l'arête P , arrivant en un point I de la face d'entrée du prisme. La propagation de ce rayon est repérée successivement par les angles, θ_i , θ_r , θ'_r et θ'_i . L'ensemble de ces angles, ainsi que D et A sont repérés en convention trigonométrique et leur valeur est comprise entre 0 et $\pi/2$.

1. Déterminer une relation liant A , θ_r et θ'_r .
2. Montrer que si θ_i est inférieur à un angle limite θ_ℓ que l'on exprimera en fonction de n et A , le rayon subit une réflexion totale dans le prisme. Calculer θ_ℓ pour $n = 1,6$.
3. Exprimer l'angle de déviation D en fonction de A , θ_i et θ'_i .

On constate expérimentalement l'existence d'un minimum de la valeur de D lorsqu'on fait varier l'angle d'incidence. On note D_m , $\theta_{i,m}$, $\theta'_{i,m}$, $\theta_{r,m}$ et $\theta'_{r,m}$ la valeur des angles au minimum de déviation.

D'après le principe de retour inverse de la lumière, au minimum de déviation, le tracé du rayon lumineux est symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle du prisme.

4. En déduire une relation simple liant les angles $\theta_{i,m}$ et $\theta'_{i,m}$ et une relation simple liant les angles $\theta_{r,m}$ et $\theta'_{r,m}$ au minimum de déviation.
5. En déduire que lorsque D est minimum, n s'exprime sous la forme :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}.$$



6. Déterminer l'expression de $\frac{dD_m}{dn}$ en fonction de A et D_m .

Dans le domaine du visible, l'indice optique $n(\lambda)$ du prisme varie avec la longueur d'onde selon la loi de Cauchy : $n(\lambda) = a + b/\lambda^2$ où $a = 1,6247$ et $b = 14,34 \times 10^{-15} \text{ m}^2$.

7. Quel phénomène physique permet de visualiser le spectre d'une lampe à hydrogène à l'aide d'un prisme ? Faire un schéma de principe.
8. À partir de la loi de Cauchy, déterminer l'expression de $\frac{dn}{d\lambda}$ en fonction de b et λ .
9. Pour la raie bleu-vert du spectre de l'atome d'hydrogène, on mesure une déviation minimale D_m de $54,85^\circ$ avec une incertitude-type $u(D_m) = 0,05^\circ$. En déduire la valeur numérique de l'indice du prisme, puis de la longueur d'onde λ correspondante avec son incertitude-type associée.

En 1885 Joseph Balmer observe le spectre visible de l'atome d'hydrogène. Il constate que $1/\lambda$ suit une loi de la forme :

$$\frac{1}{\lambda} = R_h = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2} \right) \quad \text{avec} \quad R_h = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

10. Pour quelle valeur de p la raie étudiée précédemment est-elle compatible avec les constatations de Balmer ?

Exercice 3 Arcs-en-ciel

L'arc-en-ciel est constitué d'une série d'arcs lumineux, dont le centre est situé sur le prolongement de la ligne qui va du Soleil à l'œil de l'observateur, l'un et l'autre étant donc considérés ici comme ponctuels. Ce phénomène est principalement dû à la réfraction de la lumière solaire dans les gouttes d'eau.

Le rayon des gouttes d'eau dans l'atmosphère va de 0,1 mm à 2,5 mm, avec une moyenne de 0,5 mm. Le rayon des gouttelettes dans un nuage ou dans la brume est d'environ 0,01 mm. Toutes ces gouttes peuvent produire des arcs-en-ciel, mais seules les plus grosses d'entre elles donneront un phénomène aux couleurs vives. En-dessous d'une taille de 0,2 mm, la partie rouge de l'arc disparaît. Les gouttes très petites produisent des phénomènes de diffraction importants dont les effets se combinent à ceux de la réfraction.

On observe souvent deux arcs : l'arc intérieur ou principal est celui dont les couleurs sont les plus vives et les plus pures ; le violet apparaît sur la frange interne, le rouge à l'extérieur. Dans l'arc extérieur ou secondaire les couleurs sont disposées en ordre inverse. Plusieurs théories coexistent et expliquent les différents phénomènes observés lors d'un arc-en-ciel. Nous considérerons ici la théorie « classique » de Descartes, Newton et de Young qui s'applique pour les grosses gouttes d'eau.

L'arc-en-ciel primaire

Le plan de la figure 5 est déterminé par les trois points Soleil, centre de la goutte et œil de l'observateur.

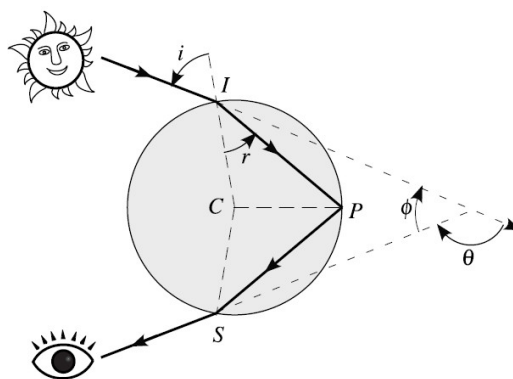


FIGURE 5 – Géométrie et notations pour l'arc-en-ciel primaire

1. Avec les notations de la figure, et en considérant des angles géométriques, montrer que

$$\theta = 2i - 4r + \pi$$



2. Montrer également qu'il existe un angle de déviation extrême noté θ_1^c et nommé « angle critique », donné par :

$$\theta_1^c = \pi + 2 \arccos \left(\sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \right) - 4 \arccos \left(\frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \right)$$

3. Justifier qualitativement qu'il y a accumulation de lumière pour cet angle.
 4. Calculer $\phi_1^c = \pi - \theta_1^c$ pour $n = 1,331$ correspondant à une longueur d'onde $\lambda = 700$ nm.
 5. Pour le spectre visible allant du rouge au bleu, l'indice varie de façon monotone entre les valeurs 1,331 et 1,346 ; calculer la largeur angulaire de l'arc-en-ciel. Cette variation d'indice explique-t-elle que le bleu est à l'intérieur et le rouge à l'extérieur de l'arc ? Faire un schéma explicatif du phénomène observé.

Les arcs-en-ciel secondaires

En réalité, un rayon incident subit plusieurs réflexions internes ; la figure 6 illustre le cas de deux réflexions.

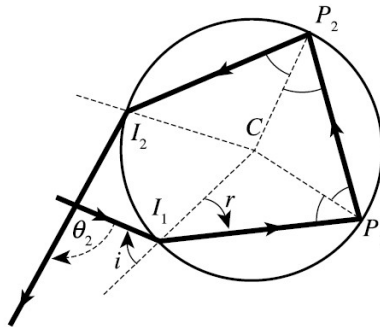


FIGURE 6 – Rayon subissant deux réflexions internes

On admettra les deux résultats suivants :

- l'angle d'émergence de l'arc d'ordre k , correspondant à k réflexions internes, est :

$$\theta_k = k\pi + 2i - 2(k+1)r$$

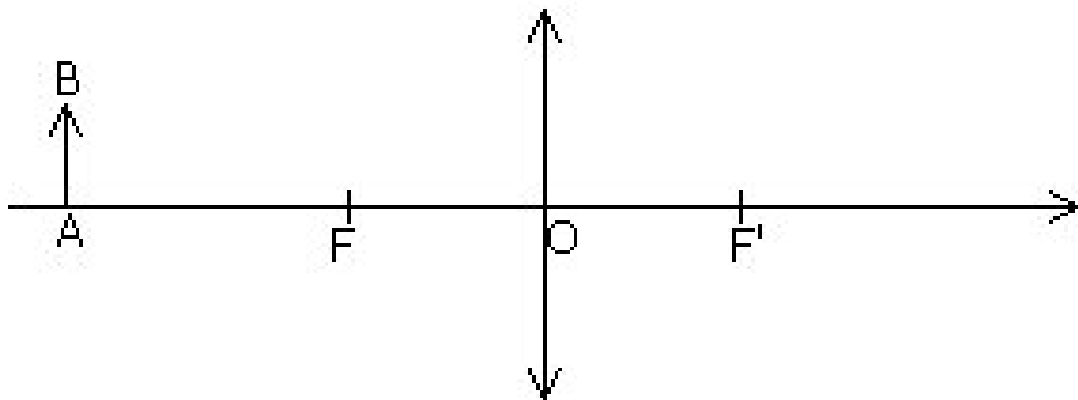
- l'angle de déviation critique (déviations stationnaire) θ_k^c correspondant au rayon critique d'ordre k est donné par :

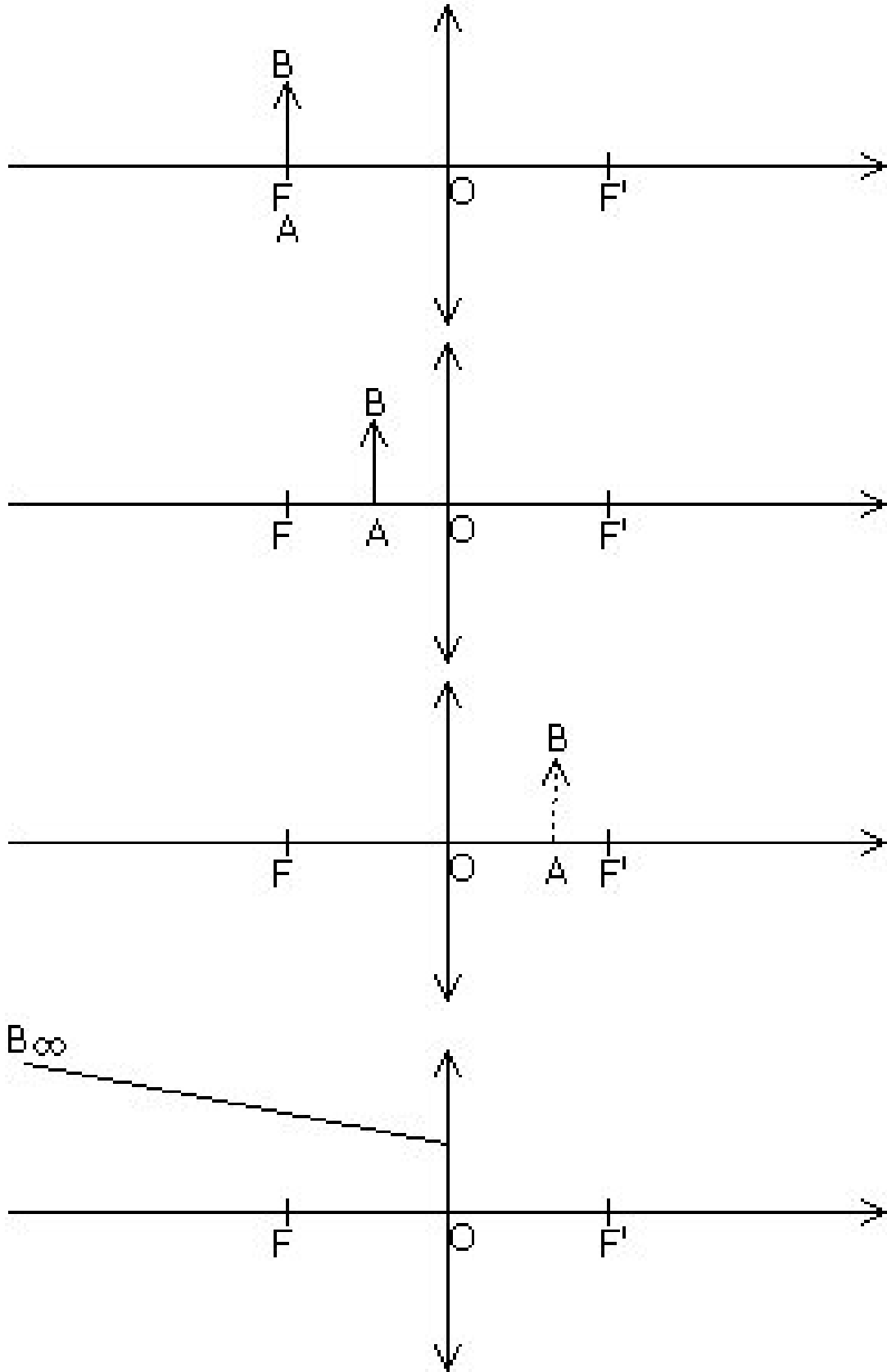
$$\theta_k^c = k\pi + 2 \arccos \left(\sqrt{\frac{n^2 - 1}{k(k+2)}} \right) - 2(k+1) \arccos \left(\frac{k+1}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k(k+2)}} \right)$$

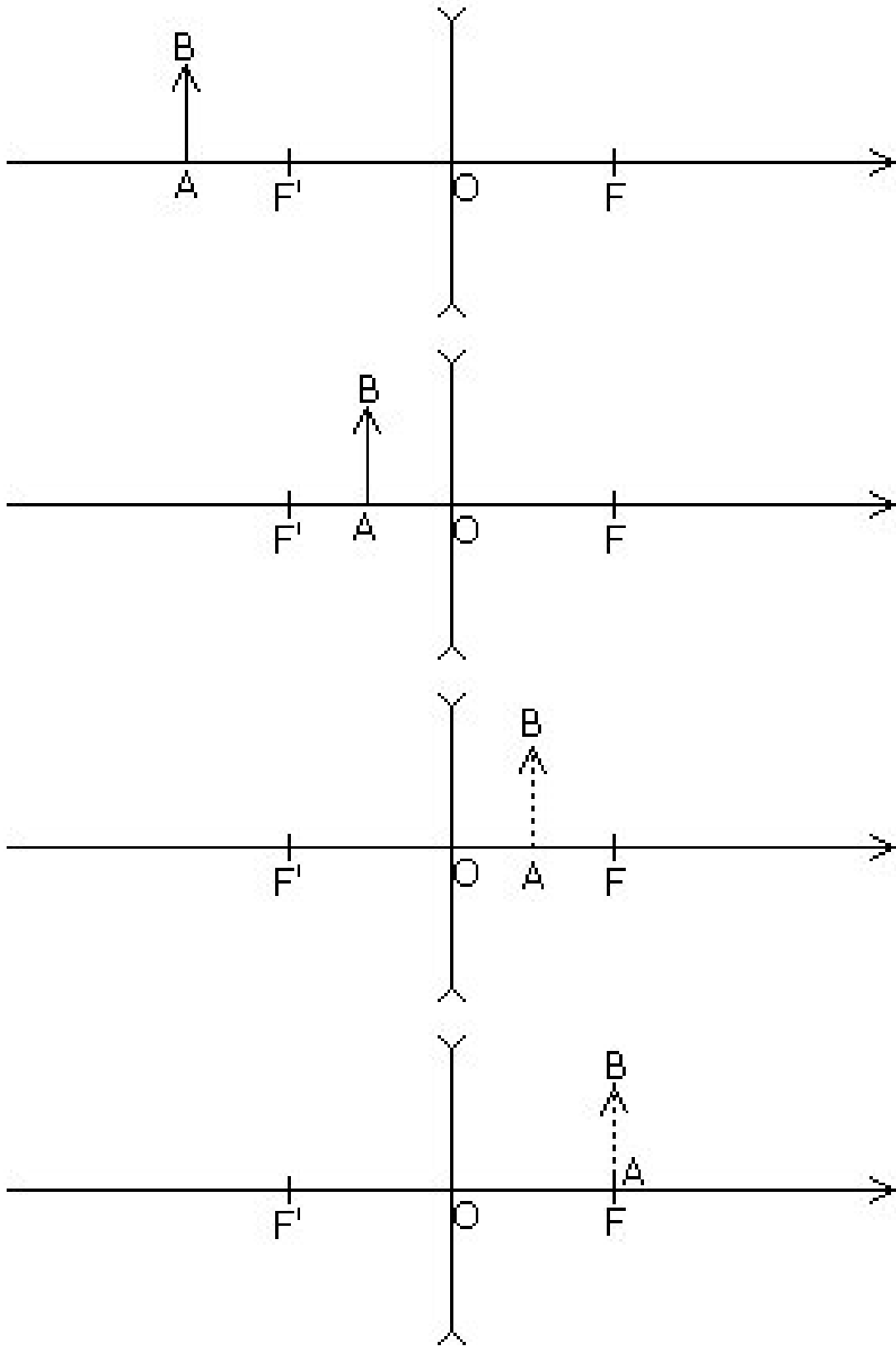
6. Justifier que l'arc primaire et l'arc secondaire ($k = 2$) ne se recouvrent pas (la région entre les deux arcs s'appelle *la bande sombre d'Alexandre*). Quel est l'ordre des couleurs dans l'arc secondaire ? Cet arc est-il situé à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc primaire ?
 7. Pourquoi n'observe-t-on jamais l'arc-en-ciel tertiaire ?

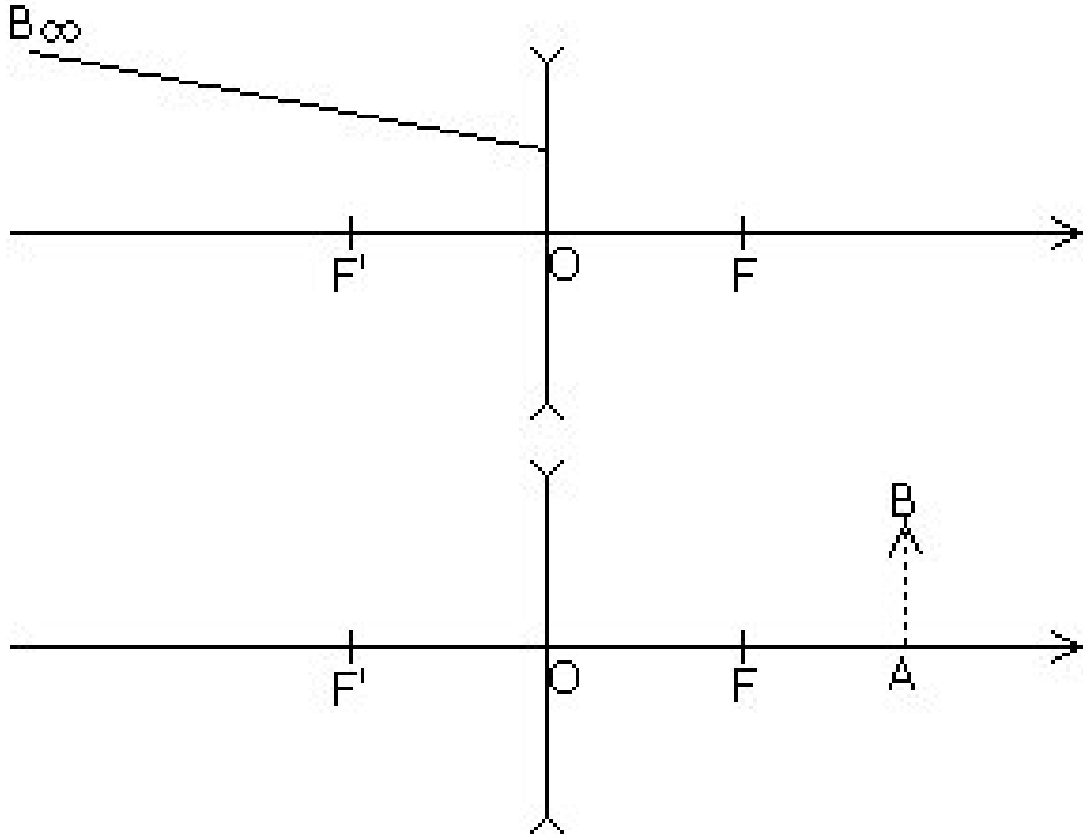
Exercice 4 Tracés

Placer l'image $A'B'$ de l'objet AB dans les différentes situations suivantes :







**Exercice 5****Achat en ligne**

Pour un TIPE un étudiant achète la lentille suivante :

**Lentilles achromatiques D 40mm**

Lentilles constituées d'un doublet corrigeant les aberrations chromatiques. Conseillées lorsque la qualité de l'image ne doit pas être dégradée (oeil...

ajouter au comparateur ajouter aux produits préférés

À partir de :

40,00 € HT
48,00 € TTC

AFFICHER DÉTAILS

FIGURE 7 – Informations disponibles en ligne

1. Que sont les aberrations chromatiques ? Comment sont-elle corrigées ?

On souhaite vérifier la distance focale annoncée par le constructeur. Sur un banc d'optique, on place :

- un objet lumineux (d'abscisse A sur le banc) ;
- un écran (d'abscisse A' sur le banc) ;
- la lentille convergente (d'abscisse O sur le banc).

On ajuste la position de la lentille afin d'observer nettement sur l'écran l'image de l'objet lumineux.

Chaque position est repérée sur le banc par une graduation : $A = 28,7$ cm, $O = 39,4$ cm et $A' = 149,7$ cm

Chaque position est identifiée avec une précision : $\Delta A = 0,2$ cm, $\Delta A' = 0,2$ cm et $\Delta O = 1$ cm

2. Quelle est, selon vous, pour chaque quantité mesurée (A , A' et O) la principale cause d'incertitude.

Dans le fichier `focometrie.py`, on se propose de déterminer la distance focale de la lentille par méthode de Monte-Carlo. Pour cela on construit un tableau de valeur numérique de taille $(N \times 3)$ ou N est un nombre entier.

- La première colonne est remplie de N valeurs aléatoirement tirées entre $A - \Delta A$ et $A + \Delta A$.
- La deuxième colonne est remplie de N valeurs aléatoirement tirées entre $O - \Delta O$ et $O + \Delta O$.



- La troisième colonne est remplie de N valeurs aléatoirement tirées entre $A' - \Delta A'$ et $A' + \Delta A'$.
- 3. Modifier les ligne 23 permettant de construire le tableau `tabIN`.
- 4. Modifier les ligne 23 permettant de construire le tableau `tabOUT` contenant N valeurs de f' calculée en appliquant pour chaque ligne la relation de conjugaison de Descartes.
- 5. Exécuter le programme et relever la valeur de la distance focale et son incertitude-type associée.
- 6. La distance focale trouvée est-elle compatible avec la donnée constructeur ?

Exercice 6 Focométrie

On étudie trois méthodes classiques pour déterminer la distance focale f' d'une lentille convergente L .

1. Comment déterminer rapidement la nature convergente ou divergente d'une lentille ?
2. Méthode de Silbermann :
La lentille est fixe, on déplace l'écran et l'objet. On s'arrête lorsque l'image formée sur l'écran est inversée et de même taille que l'objet. On mesure la distance d_1 entre l'objet et la lentille.
Que vaut la distance focale f' ?
3. Méthode de Bessel :
L'écran et l'objet sont fixes, séparés par une distance D . On déplace la lentille dont on repère la position par la distance $\overline{OA} = x$.
 - (a) Montrer que si D est suffisamment grand, il existe deux positions x_1 et x_2 telles que l'image de l'objet formée par la lentille soit nette sur l'écran.
 - (b) Dans ce cas, exprimer la distance focale en fonction de x_1 et x_2 .
4. Méthode d'autocollimation :
On ajoute un miroir plan derrière la lentille. Le miroir est laissé fixe. On déplace l'objet jusqu'à ce que l'image renvoyée par le système {lentille + miroir} soit dans le plan de l'objet.
Montrer que dans cette configuration l'objet est situé dans le plan focal objet de la lentille et vérifier graphiquement que l'image obtenue est renversée et de même taille que l'objet.
5. Comparer ces 3 méthodes (d'un point de vue mise en œuvre et précision)
6. On souhaite appliquer l'une de ces méthodes pour déterminer la distance focale d'une lentille convergente. Est-ce possible et si oui, comment procéder ?

Exercice 7 Lunette astronomique

La lunette astronomique est un système centré constitué d'un objectif et d'un oculaire. L'objectif est assimilé à une lentille mince convergente de centre optique O_1 , de distance focale f'_1 et de diamètre D_1 . L'oculaire est assimilé à une lentille mince convergente de centre optique O_2 , de distance focale f'_2 et de diamètre D_2 .

L'objectif donne, d'un objet éloigné, une image réelle appelée image objective. Cette dernière est observée au moyen de l'oculaire.

1. À quelle condition l'œil d'un observateur, supposé sans défaut, n'accomode pas ? En déduire la position relative de l'objectif et de l'oculaire. Ce système optique possède-t-il des foyers ? Comment se nomme un tel système optique ?
2. Rappeler les conditions de Gauss. Réaliser un schéma, sans respecter les échelles, montrant le devenir d'un rayon incident faisant un angle θ avec l'axe optique et émergeant sous un angle θ' dans les conditions de Gauss (figure 8).



FIGURE 8 – Modélisation de la lunette astronomique

3. Déterminer l'expression du grossissement de la lunette $G = \frac{\theta'}{\theta}$ en fonction de f'_1 et f'_2 et calculer ce grossissement si $f'_1 = 1,0\text{ m}$ et $f'_2 = 20\text{ mm}$.



On considère un faisceau lumineux issu d'un point objet A à l'infini sur l'axe optique de la lunette (figure 9).

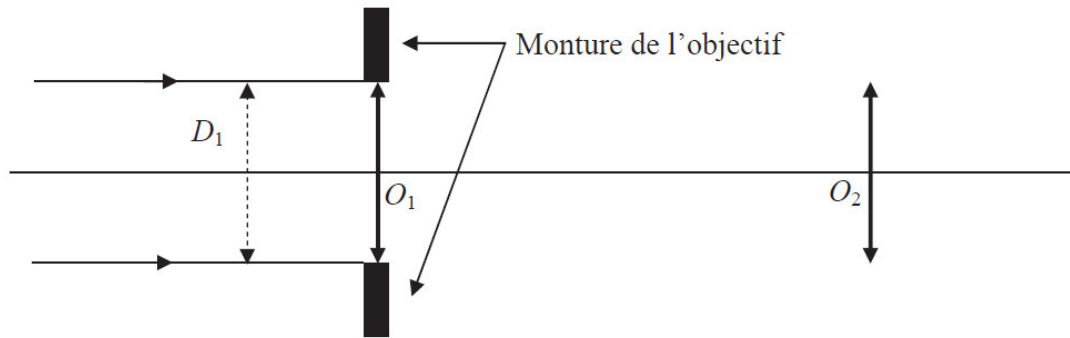


FIGURE 9 – Diaphragme d'ouverture

4. Sans respecter les échelles, représenter le devenir d'un tel faisceau lumineux limité par la monture de la lentille objectif (encore appelée diaphragme d'ouverture).
5. Exprimer le diamètre D du faisceau de rayons issu de l'oculaire en fonction du grossissement G de la lunette ainsi que du diamètre D_1 du diaphragme d'ouverture.
6. Après avoir calculé la valeur numérique du diamètre D du faisceau de rayons issu de l'oculaire, montrer que c'est le diaphragme d'ouverture, de diamètre D_1 , qui le limite et non l'oculaire de diamètre D_2 . On donne $D_1 = 10$ cm et $D_2 = 6$ mm.

On considère un objet ponctuel situé à l'infini en dehors de l'axe optique et dans la direction θ par rapport à ce dernier. (figure 10)

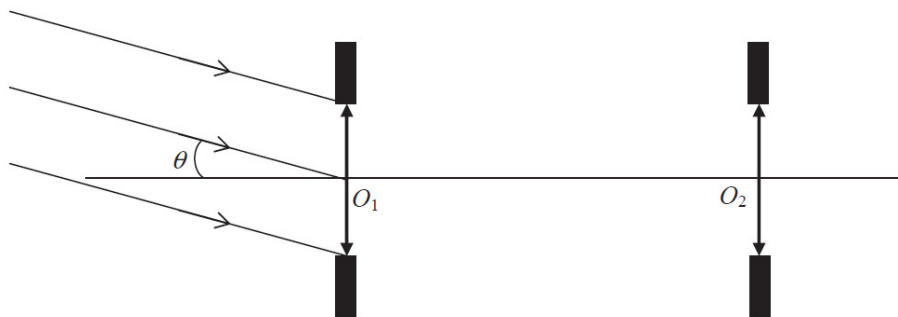


FIGURE 10 – Diaphragme de champ

7. Expliquer, de façon qualitative, ce qu'il advient des rayons lumineux lorsque l'angle θ devient trop important. On dit que l'oculaire est le diaphragme de champ de la lunette. Justifier cette affirmation.
8. L'objectif d'une lunette astronomique doit être capable de donner une image parfaite d'un point infiniment éloigné. Pour cela il doit notamment être achromatique. D'où provient l'aberration chromatique d'une lentille? Comment qualifie-t-on ce type de milieu?

Exercice 8 Microscope optique

L'objectif de microscope est un dispositif optique complexe constitué de plusieurs lentilles optiques. On considère un objectif $\times 40$ utilisé dans un microscope classique, donnant d'un objet microscopique une image réelle agrandie renversée; le grandissement transversal γ vaut donc $\gamma = -40,0$. On modélise l'objectif par une lentille mince convergente, d'axe optique (O_1z) et de centre O_1 .

La figure 11 montre une photographie de cet objectif avec les indications « 40 » pour le grandissement, « 0.65 » pour l'ouverture numérique (ON), « 160 » (mm) pour la longueur de tube Δ , définie ci-après, et « 0.17 » (mm) pour la lamelle couvre-objet. Le plan de front P en avant de la monture de l'objectif est tel que la distance O_1P est égale à 3,5 mm.

En notant α le demi-angle d'ouverture, c'est-à-dire l'angle entre l'axe optique et le rayon le plus écarté de l'axe optique qui entre dans l'objectif, l'ouverture numérique est définie par $ON = n \sin \alpha$, où n est l'indice de réfraction du milieu dans lequel plonge l'objectif ($n = 1,00$ pour l'air).



On utilise cet objectif et un oculaire de distance focale $f'_2 = 20$ mm dans un microscope classique. L'objectif et l'oculaire sont maintenus solidaires par le tube du microscope qui impose la distance $F'_1 F_2$ entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire. Cette distance Δ est appelée intervalle optique du microscope ou longueur de tube. Le microscope est utilisé de telle façon que l'œil n'ait pas besoin d'accommoder.

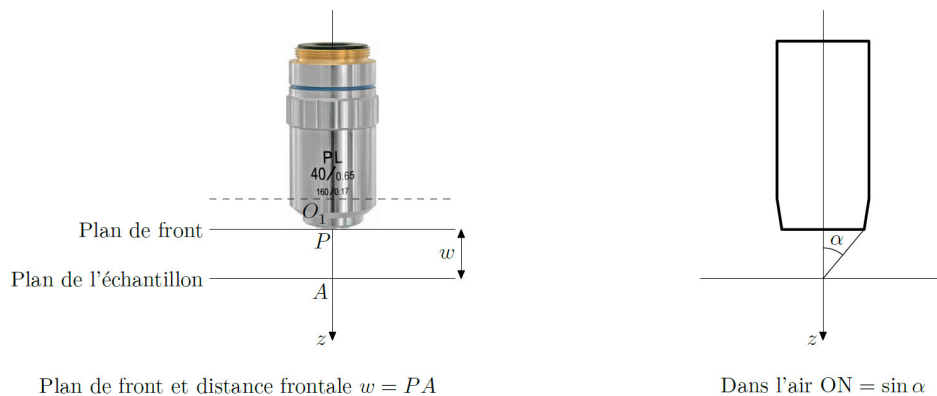


FIGURE 11 – Objectif de microscope $\times 40$

Par souci de simplicité, pour les calculs, on se placera dans les conditions de Gauss, même si elles sont mal vérifiées en pratique. Un schéma optique du microscope est représenté sur la figure 12.

1. Où doit se former l'image intermédiaire donnée par l'objectif, pour une observation sans accommodation à travers l'oculaire, de l'image finale ?
2. Sur le schéma de la figure 12, réaliser la construction géométrique de l'image de l'objet AB par l'ensemble du microscope.
3. Déterminer puis calculer la distance focale équivalente f'_1 de la lentille modélisant l'objectif.
4. Déterminer puis calculer la distance frontale w (distance de travail), c'est-à-dire la distance PA séparant la lame porte-échantillon et le plan de front de l'objectif $\times 40$. Expliquer pourquoi certains objectifs de fort grandissement sont équipés d'un système à ressort qui évite la détérioration de la lentille frontale.

On considère que l'œil est capable d'accommoder pour avoir une vision nette d'un objet situé à une distance minimale $d_m = 25$ cm. L'œil est positionné dans le plan focal image de l'oculaire.

5. Calculer la latitude de mise au point du microscope pour cet objectif, c'est-à-dire la distance dont on peut déplacer l'objectif par rapport à l'objet en conservant une vision nette. De quel système doit être équipé le tube du microscope ?

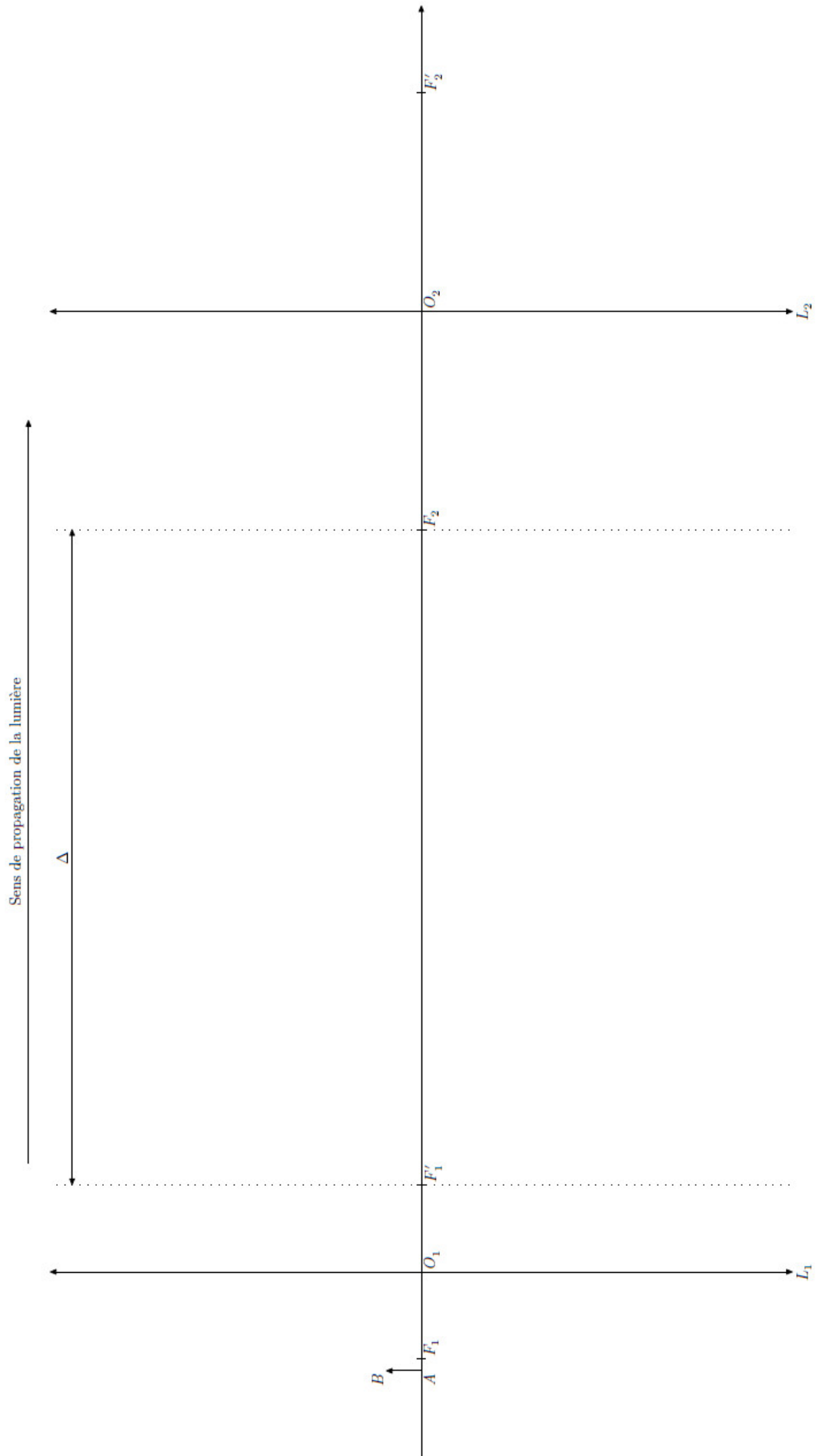


FIGURE 12 – Schéma optique du microscope