



Introduction à la relativité restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Introduction à la relativité restreinte



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^esiècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

1

État des lieux à la fin du XIX^esiècle

Mécanique : Lois de Newton (depuis 1687)



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

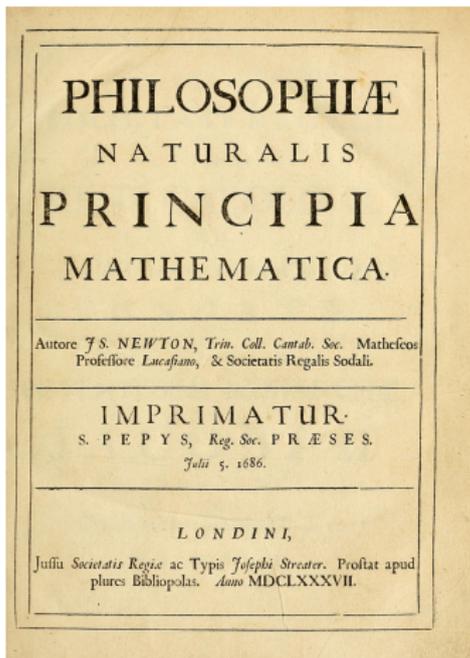
Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste



Les lois de Newton sont exposés dans son ouvrage en latin :
Philosophiæ naturalis principia mathematica



Électromagnétisme : équations de Maxwell (finalisées vers 1880)

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

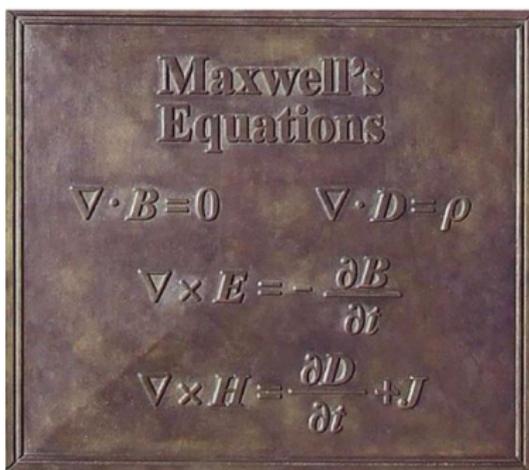
Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste



Plaque commémorative placée sous la statue de James Clerk Maxwell à Edinbourg



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

À la fin du XIX^e siècle une large partie de la communauté scientifique estime que la physique est « terminée » et que tous les phénomènes observables peuvent s'interpréter soit dans le cadre de la mécanique de Newton, soit dans le cadre de l'électromagnétisme de Maxwell.

« There is nothing new to be discovered in physics now, all that remains is more and more precise measurement » Lord Kelvin (1900)

Seules quelques rares expériences semblent résister aux prévisions de l'une de ces deux grandes théories.

- ▶ Spectre d'émission d'un corps solide chauffé
→
- ▶ Expérience de Michelson et Morley
→



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

2

Insuffisance de la relativité galiléenne



Relativité galiléenne

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

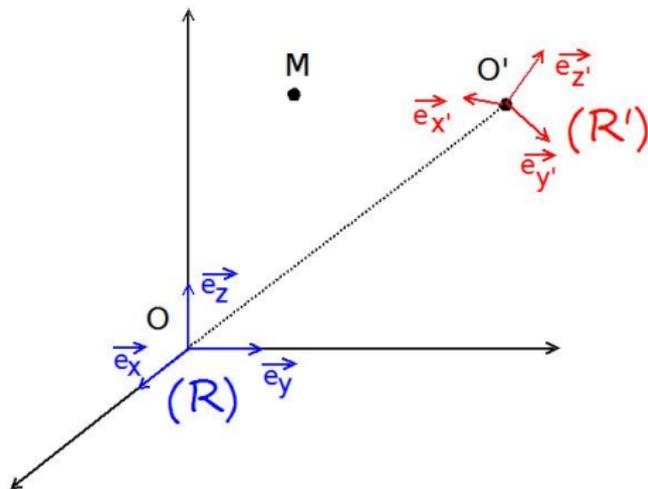
Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Référentiel :

On repère un « événement » dans un référentiel \mathcal{R} par $E_{\mathcal{R}}$:
 (t, x, y, z)





Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Formules de changement de référentiel = transformation de Galilée des coordonnées.

$$\overrightarrow{O'M} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow E_{\mathcal{R}'} = \begin{cases} t' = t \\ x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \\ z' = z - z_{O'} \end{cases}$$

Hypothèse du caractère absolu du temps :

- ▶ Le temps s'écoule de la même manière dans tous les référentiels
- ▶ Deux événements simultanés dans un référentiel le sont aussi dans les autres référentiels.



Référentiels galiléens

Introduction à la relativité restreinte

État des lieux à la fin du XIX^e siècle

Insuffisance de la relativité galiléenne

Postulats

Transformations de Lorentz

Intervalle d'espace - temps

Représentation graphique

Éléments de dynamique relativiste

Définition

On postule l'existence de référentiels dans lesquels un point matériel soumis à une résultante de forces nulle possède un mouvement rectiligne uniforme et inversement (Première loi de Newton)

Soient 2 référentiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') galiléens

On observe dans (\mathcal{R}) galiléen un point matériel M mécaniquement isolé : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$\text{donc } \vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')} = \vec{0}$$

$$\text{Soit } \vec{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')} + \vec{v}_e(M)$$

$$\text{Donc } \vec{v}_e(M) = c\vec{t}\vec{e}$$

Les deux référentiels sont



Généralisation : Notion de relativité galiléenne

Soit un point M soumis à des forces extérieures.

$$m \vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \sum \vec{F}_{ext} \text{ et } m \vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')} = \sum \vec{F}'_{ext}$$

Si (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') sont galiléens, $\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')}$

donc

$$\sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}'_{ext}$$

Les lois de la mécanique sont

.....

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^esiècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

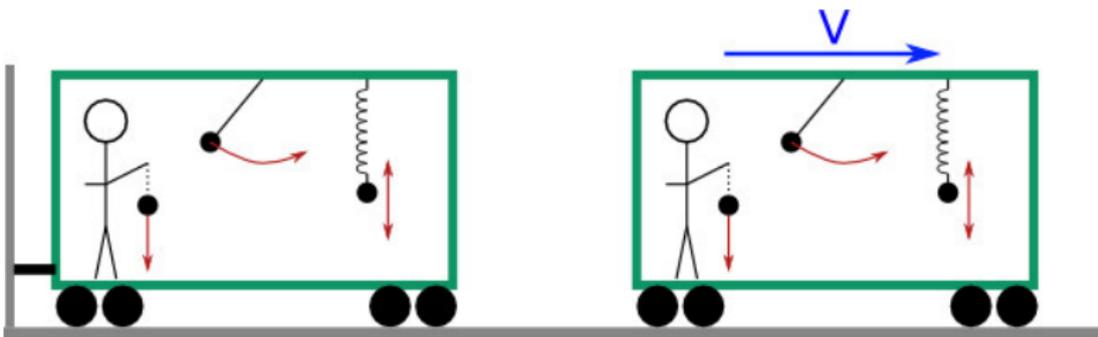
Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste



On réalise des expériences de mécanique dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) et dans un train en MRU par rapport à la Terre. Les résultats des expériences seront identiques dans chacun de ces deux référentiels galiléens.

Transformations galiléennes



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

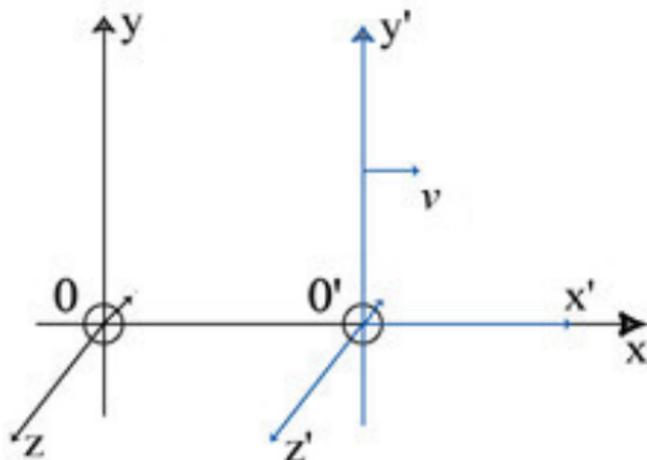
Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

On considère le référentiel \mathcal{R} supposé fixe, et le référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$. (configuration standard)





Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

$$E_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow E_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} (t' = t) \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

On en déduit les formules de transformation galiléenne des vitesses et des accélérations :

$$\begin{cases} (t' = t) \\ v'_x = v_x - v \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (t' = t) \\ a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

On retrouve à travers l'expression du PFD l'invariance des lois de la mécanique par changement de référentiel galiléen.

Élargissement aux lois de l'électromagnétisme ?



On considère un canon à électrons émettant des électrons à flux constant et à une vitesse v dans une direction particulière. Dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen) les lois de l'électromagnétisme prévoient que

- ▶ la présence de charges \rightarrow
- ▶ Un courant de charges (mouvement) \rightarrow

... mais dans le référentiel des électrons ? Quel est le mouvement des électrons ?

Conclusion :

.....

.....

.....

Introduction à la relativité restreinte

État des lieux à la fin du XIX^e siècle

Insuffisance de la relativité galiléenne

Postulats

Transformations de Lorentz

Intervalle d'espace - temps

Représentation graphique

Éléments de dynamique relativiste



Expérience de Michelson et Morley

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

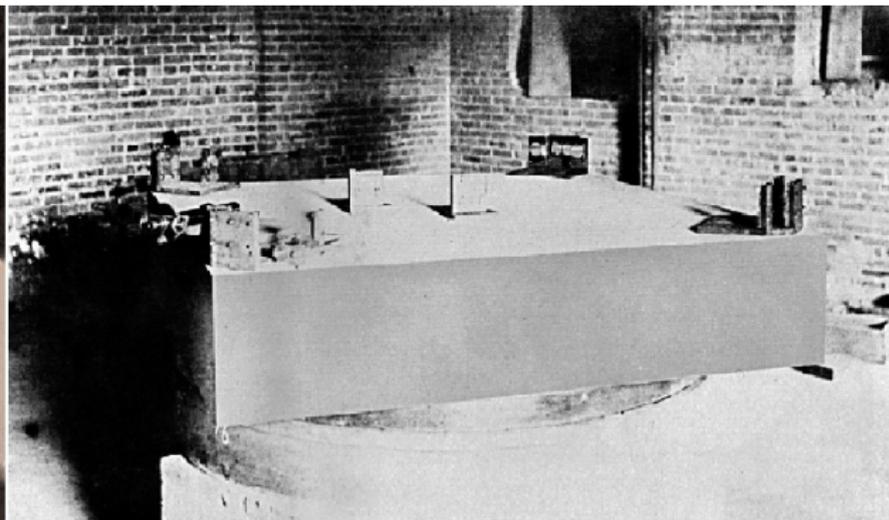
Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

À la fin du XIX^e siècle on postule l'existence d'un milieu, appelé « l'éther » permettant aux ondes lumineuses de se propager. Pour mettre en évidence la présence de ce milieu, deux physiciens, Albert Michelson et Edward Morley, imaginent une expérience qui permettrait de mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther.





Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

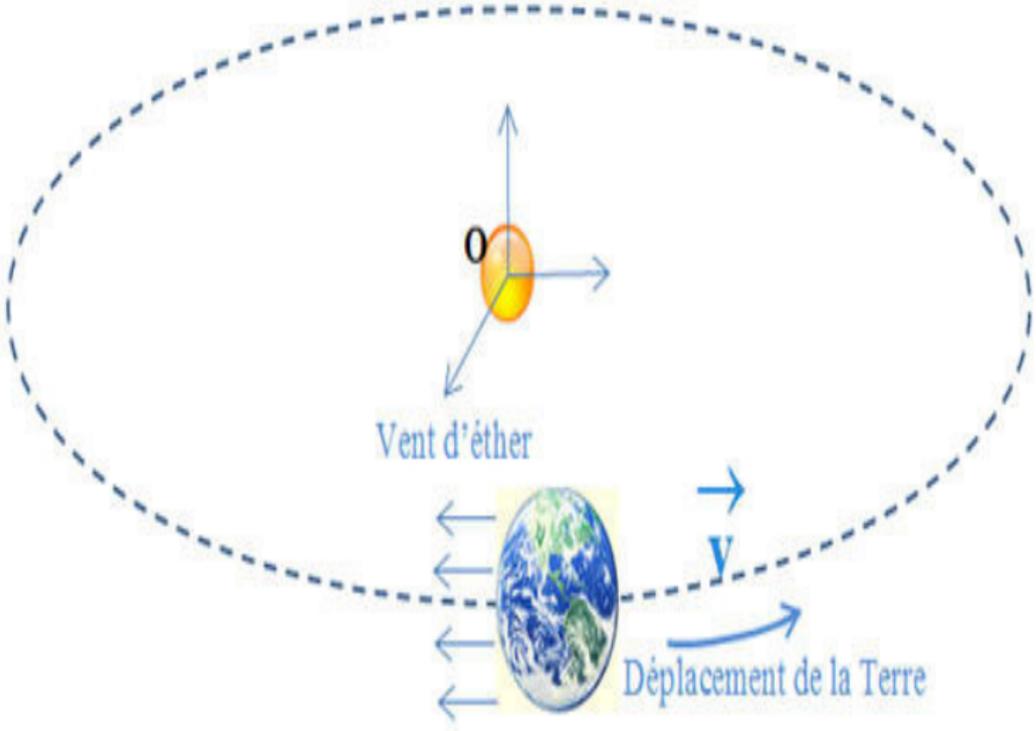
Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste





Introduction à la relativité restreinte

État des lieux à la fin du XIX^e siècle

Insuffisance de la relativité galiléenne

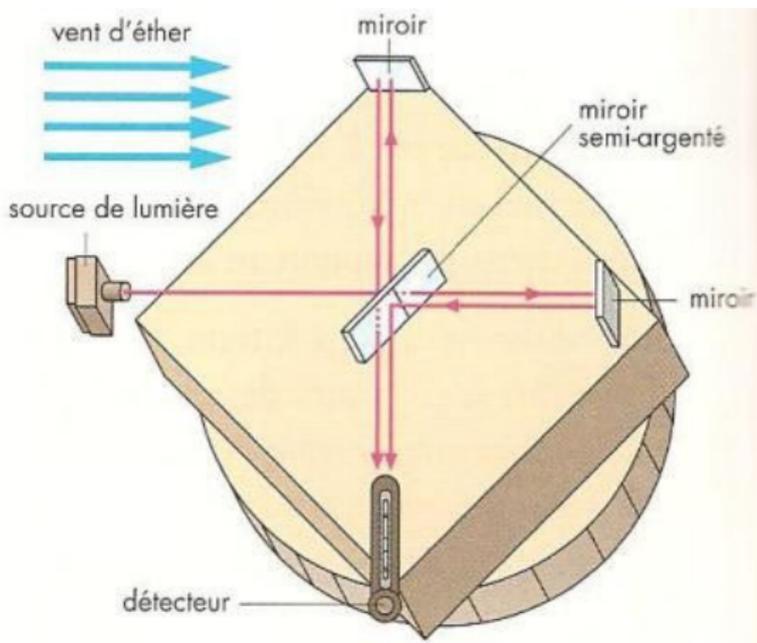
Postulats

Transformations de Lorentz

Intervalle d'espace - temps

Représentation graphique

Éléments de dynamique relativiste



L'expérience devait, selon les prédictions des lois classiques, conduire à une modification perceptibles de la figure d'interférence..... mais rien ne fut observé !

Expérience de Bertozzi



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

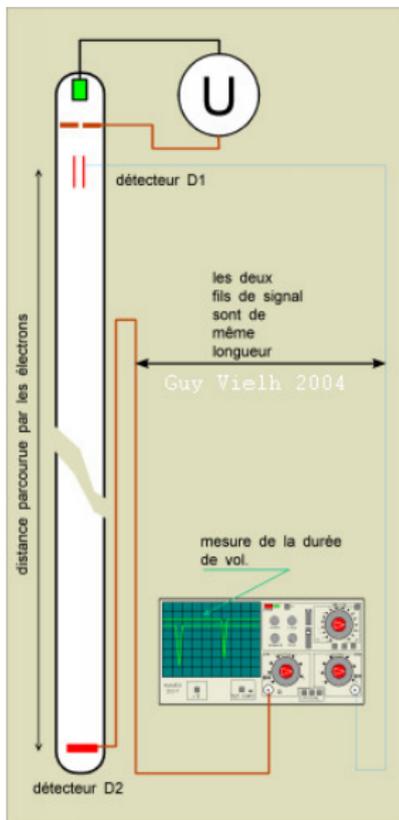
Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste





Introduction
à la relativité
restreinte

.....

.....

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

.....

.....

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

.....

.....

Postulats

.....

Transformations
de Lorentz

.....

Intervalle
d'espace -
temps

.....

Représentation
graphique

.....

Éléments de
dynamique
relativiste



Introduction à la relativité restreinte

État des lieux à la fin du XIX^e siècle

Insuffisance de la relativité galiléenne

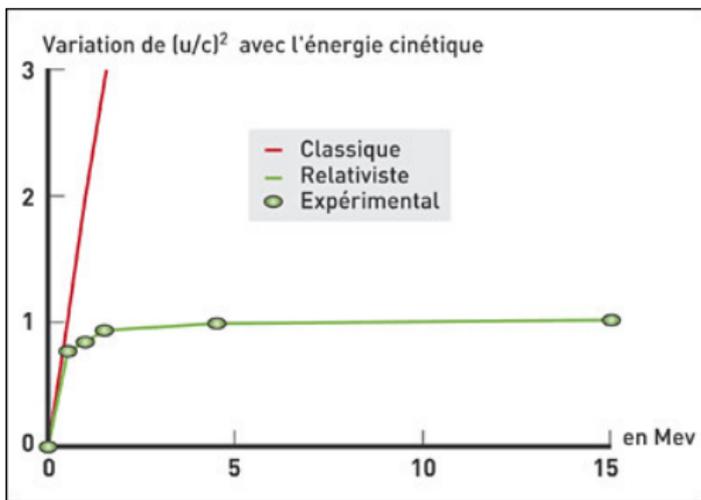
Postulats

Transformations de Lorentz

Intervalle d'espace - temps

Représentation graphique

Éléments de dynamique relativiste



- ▶ L'expression de l'énergie cinétique d'une particule de masse m ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$) n'est plus valide pour des vitesses proches de c .
- ▶ La célérité de la lumière dans le vide apparaît comme une vitesse limite.



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

3

Postulats



1905 - Annus mirabilis

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste



À 26 ans, Albert Einstein publie
4 articles majeurs :

- ▶ Théorie des quanta
- ▶ Mouvement Brownien
- ▶ Relativité restreinte
- ▶ Équivalence masse-énergie

Relativité restreinte → Pas
d'effet de la gravitation

1915 : Publication de la relativité
générale = Nouvelle théorie de la
gravitation.

Énoncé des postulats historiques de la cinématique relativiste



Introduction
à la relativité
restreinte

.....
.....

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

.....

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

.....
.....

Postulats

Transformations
de Lorentz

.....

Intervalle
d'espace -
temps

.....

Représentation
graphique

.....

Éléments de
dynamique
relativiste

.....



Conséquence 1 : Définition du mètre

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Par décret du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), datant de 1983, $c = 299\,792\,458$ m/s.

Le mètre est donc défini comme la longueur parcourue par la lumière dans le vide pendant une durée de $1/299\,792\,458$ s.

Ordres de grandeur :

- ▶ Distance Terre-Lune ~ 1 seconde lumière,
- ▶ Distance Terre-Soleil ~ 8 minute lumière,
- ▶ 30 cm $\leftrightarrow 1$ nanoseconde lumière,

Conséquence 2 : Revoir la notion de simultanéité



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

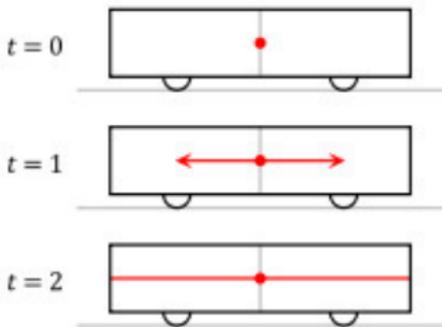
Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

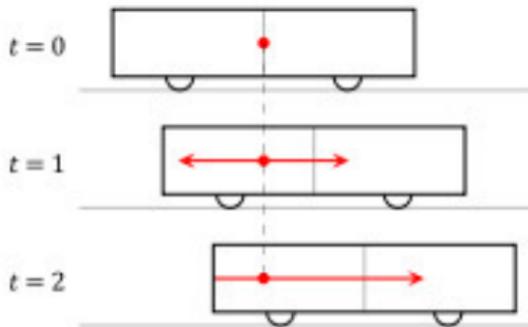
Éléments de
dynamique
relativiste

Un train circule à vitesse v constante par rapport au sol (MRU).
Un passager situé au exactement au milieu d'un wagon allume
un briquet à $t = 0$ sur sa montre.
Une vache regarde passer le train en broutant de l'herbe.

Dans le référentiel du train



Dans le référentiel de la vache



La simultanéité de deux événements n'est pas universelle : Deux événements simultanés dans un référentiel galiléen ne le sont plus dans un autre référentiel galiléen.



Conséquence 3 : Dilatation des durées

Introduction à la relativité restreinte

État des lieux à la fin du XIX^e siècle

Insuffisance de la relativité galiléenne

Postulats

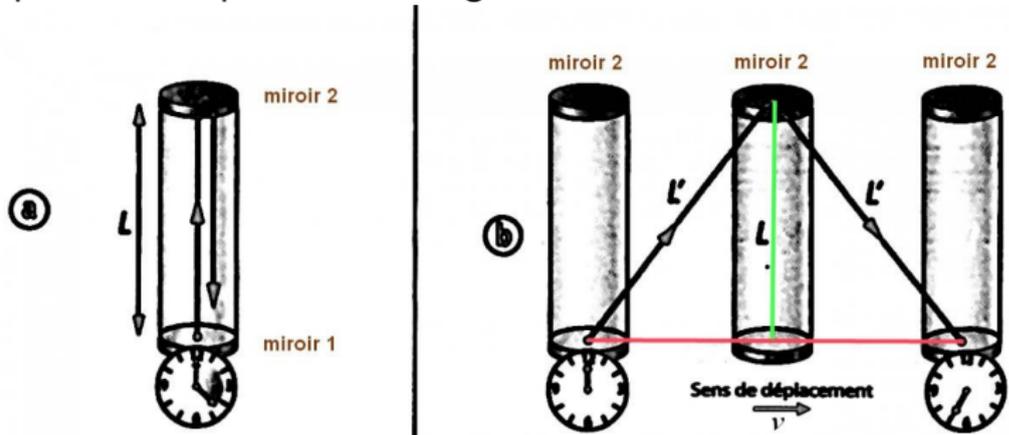
Transformations de Lorentz

Intervalle d'espace - temps

Représentation graphique

Éléments de dynamique relativiste

Expérience de pensée : Horloge à lumière



Dans le référentiel (a) l'horloge est immobile. La durée d'un aller-retour de rayon de lumière vaut $\tau = \frac{2L}{c}$.

Cette durée s'appelle « la durée propre » entre deux événements.

Durée propre :

.....



Dans le référentiel (b) l'horloge est en MRU à la vitesse v . On note τ la durée d'un aller-retour de la lumière dans l'horloge dans le référentiel (b). τ' n'est pas une durée propre car les deux événements n'ont pas lieu au même endroit.

Déterminer la relation entre τ et τ'

.....

.....

.....

.....

.....

- Introduction à la relativité restreinte
- État des lieux à la fin du XIX^e siècle
- Insuffisance de la relativité galiléenne
- Postulats**
- Transformations de Lorentz
- Intervalle d'espace - temps
- Représentation graphique
- Éléments de dynamique relativiste



Introduction
à la relativité
restreinte

.....

.....

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

.....

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

.....

.....

Postulats

Transformations
de Lorentz

.....

Intervalle
d'espace -
temps

.....

Représentation
graphique

.....

Éléments de
dynamique
relativiste

.....

Conséquence 4 : Contraction des longueurs



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

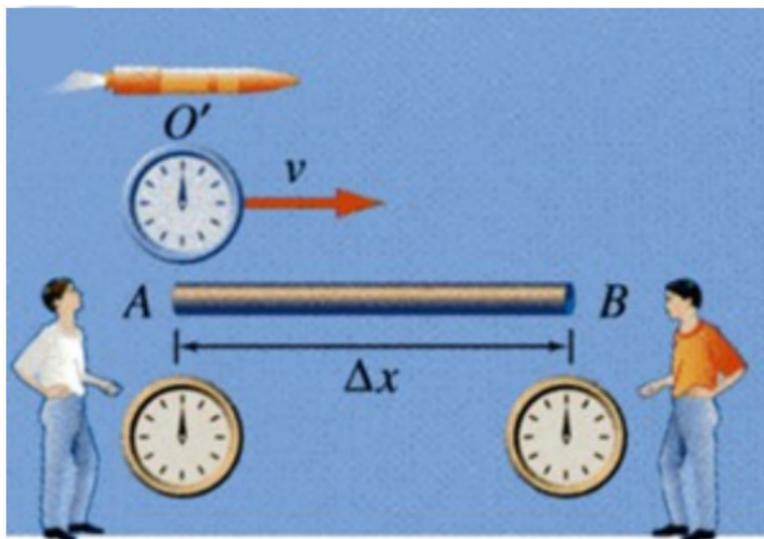
Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Mesure de la longueur d'un objet dans deux référentiels galiléens :





- Introduction à la relativité restreinte
- État des lieux à la fin du XIX^e siècle
- Insuffisance de la relativité galiléenne
- Postulats**
- Transformations de Lorentz
- Intervalle d'espace - temps
- Représentation graphique
- Éléments de dynamique relativiste

Longueur propre :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

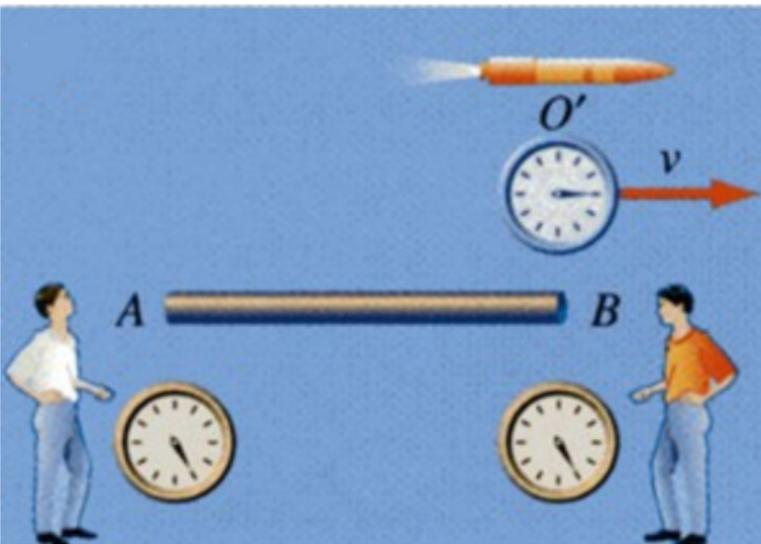
Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste



Quelle est la longueur de la barre perçue par la fusée ?

.....

.....



Introduction
à la relativité
restreinte

.....

.....

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

.....

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

.....

.....

Postulats

Transformations
de Lorentz

.....

Intervalle
d'espace -
temps

.....

Représentation
graphique

.....

Éléments de
dynamique
relativiste

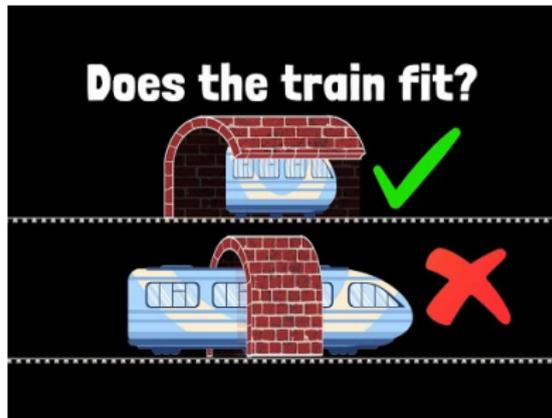
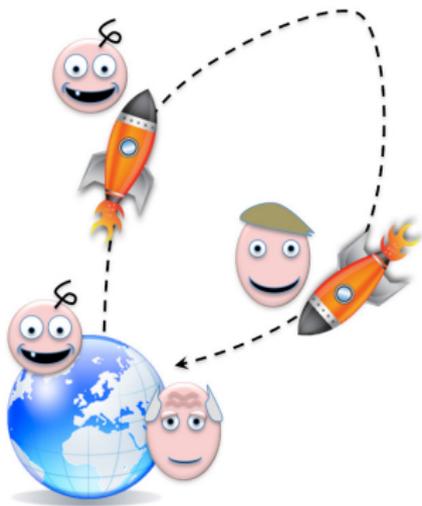
.....

Paradoxes



Ces effets relativistes non intuitifs donnent naissance à des situations qui peuvent sembler paradoxales.

- ▶ Paradoxe des jumeaux
- ▶ Paradoxe du train dans un tunnel



Ces paradoxes apparaissent lorsque le problème est mal posé. Mais se lèvent dès lors que la situation est analysée avec soin.



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

**Transformations
de Lorentz**

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

4

Transformations de Lorentz



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

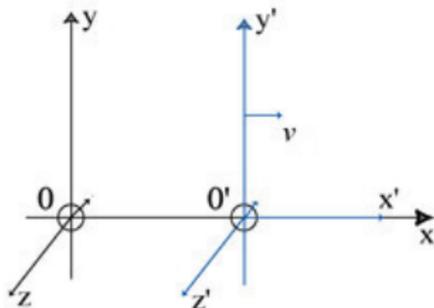
Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

En relativité restreinte, les transformations galiléennes des positions, des vitesses et des accélérations ne sont plus valides. Elles doivent être remplacées par de nouvelles relations.

Dans la suite, on cherche les expressions permettant d'exprimer les coordonnées dans un référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme selon l'axe (Ox) à la vitesse v par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen. Pour simplifier l'étude on considère également que les deux repères attachés à ces référentiels sont confondus à $t = t' = 0$.



Hypothèses



On peut démontrer ces expressions de nombreuses manières.

On part ici des postulats historiques. En particulier, on considère l'invariance de c quel que soit le référentiel galiléen et quelle que soit la vitesse de la source dans le référentiel d'étude.

On suppose de plus que l'espace-temps est homogène :

-
-
-
-

- Introduction à la relativité restreinte
- État des lieux à la fin du XIX^esiècle
- Insuffisance de la relativité galiléenne
- Postulats
- Transformations de Lorentz
- Intervalle d'espace - temps
- Représentation graphique
- Éléments de dynamique relativiste

Homogénéité de l'espace-temps



Introduction
à la relativité
restreinte

.....
.....

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

.....

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

.....
.....

Postulats

**Transformations
de Lorentz**

.....

Intervalle
d'espace -
temps

.....

Représentation
graphique

.....

Éléments de
dynamique
relativiste

.....



Introduction
à la relativité
restreinte

.....

.....

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

.....

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

.....

.....

Postulats

.....

Transformations
de Lorentz

.....

Intervalle
d'espace -
temps

.....

Représentation
graphique

.....

Éléments de
dynamique
relativiste

Analyse de situations particulières



Clap en $x' = 0$

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Clap en $x = 0$

Introduction
à la relativité
restreinte

.....

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

.....

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

.....

Postulats

.....

Transformations
de Lorentz

.....

Intervalle
d'espace -
temps

.....

Représentation
graphique

.....

Éléments de
dynamique
relativiste

.....



Émission d'un flash lumineux à $t = t' = 0$ en $x = x' = 0$, reçu en un détecteur D en (t_D, x_D) dans \mathcal{R} et (t'_D, x'_D) dans \mathcal{R}'

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Mesure, à l'instant $t = 0$ dans \mathcal{R} de la longueur d'une règle d'une longueur ℓ_0 au repos dans \mathcal{R}'

- Introduction à la relativité restreinte
- État des lieux à la fin du XIX^e siècle
- Insuffisance de la relativité galiléenne
- Postulats
- Transformations de Lorentz
- Intervalle d'espace - temps
- Représentation graphique
- Éléments de dynamique relativiste

-
-
-
-
-
-
-
-



Mesure de la longueur de cette règle longueur ℓ_0 au repos dans \mathcal{R} à l'instant $t' = 0$ dans \mathcal{R}'

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

-
-
-
-
-
-
-
-



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Dans le cas de deux référentiels en translation selon (Ox) , possédant des axes parallèles deux à deux et des origines O et O' qui coïncident en $t = t' = 0$ la transformation de Lorentz (spéciale) s'écrit donc :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Contrairement aux transformations de Galilée, les 4 paramètres qui localisent un événement (3 de positions et 1 de temps) sont « mélangés » dans la transformation de Lorentz.



Introduction à la relativité restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Les transformations de Lorentz peuvent être démontrées à partir d'hypothèses simples de l'espace temps

- ▶ homogénéité de l'espace-temps,
- ▶ isotropie de l'espace,
- ▶ causalité,
- ▶ structure de groupe des transformations de Lorentz.

⇒ L'hypothèse $c = \text{cte}$ par changement de référentiel galiléen n'est pas nécessaire.

⇒ La relativité est un cadre très général que toute théorie physique doit vérifier



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

**Intervalle
d'espace -
temps**

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

5

Intervalle d'espace - temps



Définition

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Soient deux événements observés dans un référentiel inertiel \mathcal{R} :

$$E_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

On note $\Delta x_{12} = x_2 - x_1$, $\Delta y_{12} = y_2 - y_1$, $\Delta z_{12} = z_2 - z_1$ et $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$

L'intervalle d'espace-temps Δs_{12} entre les événements E_1 et E_2 dans le référentiel d'étude est défini par :

$$\Delta s_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2 - \Delta y_{12}^2 - \Delta z_{12}^2$$



Changement de référentiel inertiel

Introduction à la relativité restreinte

État des lieux à la fin du XIX^e siècle

Insuffisance de la relativité galiléenne

Postulats

Transformations de Lorentz

Intervalle d'espace - temps

Représentation graphique

Éléments de dynamique relativiste

On considère le référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme selon (Ox) à la vitesse v par rapport au référentiel \mathcal{R} .

$\Delta s'$ est l'intervalle d'espace-temps entre les deux événements E_1 et E_2 décrits dans le référentiel \mathcal{R}'

Quelle est la relation entre $\Delta s'$ et Δs ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Introduction
à la relativité
restreinte

.....

.....

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

.....

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

.....

.....

Postulats

.....

Transformations
de Lorentz

.....

Intervalle
d'espace -
temps

.....

Représentation
graphique

.....

Éléments de
dynamique
relativiste

Intervalle d'espace-temps et dilatation des durées



Horloge à lumière

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

**Intervalle
d'espace -
temps**

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Intervalle d'espace-temps et contraction des longueurs



Mesure de la longueur de la barre

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

**Intervalle
d'espace -
temps**

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Les différents types d'intervalles d'espace-temps



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

**Intervalle
d'espace -
temps**

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

**Représentation
graphique**

Éléments de
dynamique
relativiste

6

Représentation graphique



Diagramme d'espace - temps ; Cône de lumière

**Introduction
à la relativité
restreinte**

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

**Représentation
graphique**

Éléments de
dynamique
relativiste

Traduction graphique des transformations de Lorentz dans un diagramme d'espace-temps de Minkowski



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Introduction à la relativité restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

**Représentation
graphique**

Éléments de
dynamique
relativiste



Application 1 : Temps de vie des muons.

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Les muons cosmiques sont des particules ayant des propriétés très semblables aux électrons sauf qu'ils sont plus massifs et instables. On les trouve en abondance dans les rayons cosmiques. Leur durée de vie moyenne au repos a été mesurée et vaut $\tau_0 = 2.197 \mu\text{s}$. Dans un référentiel donné, le processus de désintégration des muons est régit par une loi du type :

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Avec

- ▶ N_0 le nombre de muons dans un échantillon à $t = 0$,
- ▶ $N(t)$ le nombre de muons restant à l'instant t ,
- ▶ τ la durée de vie moyenne des muons dans le référentiel d'étude.



Introduction à la relativité restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

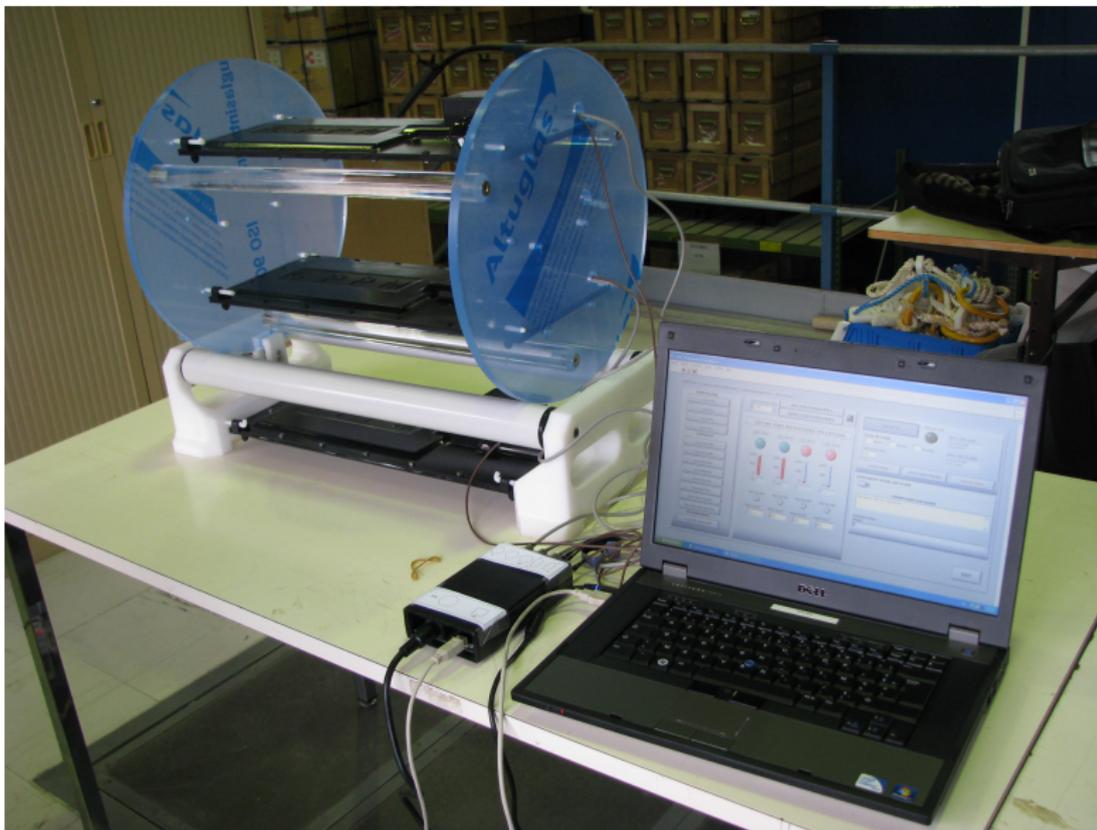
Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste





Introduction à la relativité restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Un détecteur de muons est placé tout d'abord au sommet du Mont Washington (1910 m), puis au pied de cette montagne, sensiblement au niveau de la mer (3 m). Au cours de cette expérience, on a pu sélectionner des muons de vitesse $v = 0,992 \pm 0,03c$. Dans sa première position, le détecteur enregistre en moyenne 563 ± 10 muons par heure et 408 ± 9 muons par heure dans sa seconde position.

1. En exploitant la loi de décroissance, déterminer la durée de vie moyenne des muons dans le référentiel terrestre.
2. Quelle est la valeur de τ prévue par la théorie de la relativité restreinte ?



Application 2 : Paradoxe des Jumeaux de Langevin

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

On considère deux jumeaux. À l'instant $t=0$, l'un des deux frères monte dans une fusée et s'envole à la vitesse $v = 0,8c$ vers une station spatiale située à une distance $L_0 = 20 \text{ al}$. Arrivé sur place il fait demi-tour et parcourt le chemin inverse à la même vitesse de $0,8c$. L'objectif de l'étude est de déterminer l'âge de chacun des deux frères lorsque le frère voyageur sort de la fusée.

On introduit 3 référentiels

- ▶ \mathcal{R}_T le référentiel lié à la Terre,
- ▶ \mathcal{R}_A le référentiel lié à la fusée pour l'aller,
- ▶ \mathcal{R}_R le référentiel lié à la fusée pour le retour,



Introduction à la relativité restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

1. Préciser en quoi cette situation semble paradoxale.
Comment lever le paradoxe ?
2. Calculer la durée du voyage dans le référentiel de la Terre.
3. Calculer la durée de l'aller et du retour pour le voyageur dans la fusée.
4. Représenter le voyage dans un diagramme d'espace temps de Minkowski en choisissant les axes orthogonaux pour le référentiel terrestre.
5. Déterminer, dans chacun des 3 référentiels, quel événement sur Terre est simultané avec le demi-tour de la fusée ?



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

7

Éléments de dynamique relativiste



Quadrivecteur position

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Un événement est un point dans l'espace-temps repéré par 4 coordonnées (ct, x, y, z) .

On définit les quantités $\underline{r} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\underline{r}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ repérant

l'événement E respectivement dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

La transformation de Lorentz permet d'exprimer les coordonnées de \underline{r}' en fonction de \underline{r} :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \underline{r}' = \begin{pmatrix} \gamma(ct - \beta x) \\ \gamma(x - \beta ct) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

On peut écrire cette loi de transformation sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ou bien sous forme plus compacte :

$$\underline{r}' = \Lambda \underline{r}$$

où Λ est la matrice de Lorentz :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Qu'est-ce qu'un quadrivecteur ?

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Définition :

Un quadrivecteur est un vecteur de l'espace-temps (à 4 dimensions) qui se transforme lors d'un changement de référentiel inertiel par transformation de Lorentz.

Propriété :

Dans le cadre de la relativité restreinte, pour un quadrivecteur

$\underline{a} = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ on définit une « pseudo-norme » telle que :

$$\underline{a}^2 = \underline{a} \cdot \underline{a} = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2$$

La pseudo-norme d'un quadrivecteur est un invariant relativiste.
(Elle est conservée par changement de référentiel inertiel)



Métrique de Minkowski

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

On considère 2 événements infiniment proches dans l'espace-temps.

L'intervalle d'espace-temps séparant ces deux événements s'écrit :

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

Rq : On vérifie bien que la pseudo-norme du vecteur position est un invariant relativiste.

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\text{Avec } \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\eta_{\mu\nu}$ est appelée « métrique de Minkowski »



Quadrivecteur vitesse

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^e siècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Définition :

Quadrivitesse d'une particule matérielle dans un référentiel galiléen

$$\underline{v}(t) = \frac{d}{d\tau} \underline{r}(t)$$

$$\underline{v} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dy}{d\tau} \\ \frac{dz}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)c \\ \gamma(v)v_x \\ \gamma(v)v_y \\ \gamma(v)v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)c \\ \gamma(v)\vec{v} \end{pmatrix}$$

On peut montrer que cette grandeur est bien un quadrivecteur : elle se transforme par application des transformations de Lorentz lors d'un changement de référentiel et sa pseudo-norme est un invariant relativiste.



Quadrivecteur vecteur énergie-impulsion

Introduction
à la relativité
restreinte

État des
lieux à la fin
du XIX^esiècle

Insuffisance
de la
relativité
galiléenne

Postulats

Transformations
de Lorentz

Intervalle
d'espace -
temps

Représentation
graphique

Éléments de
dynamique
relativiste

Définition :

Quadrivecteur vecteur énergie-impulsion d'une particule matérielle dans un référentiel galiléen

$$\underline{p} = m\underline{v}$$

Expression :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)mv_x \\ \gamma(v)mv_y \\ \gamma(v)mv_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)m\vec{v} \end{pmatrix}$$

Expression de la pseudo-norme :

.....



- Introduction à la relativité restreinte
- État des lieux à la fin du XIX^e siècle
- Insuffisance de la relativité galiléenne
- Postulats
- Transformations de Lorentz
- Intervalle d'espace - temps
- Représentation graphique
- Éléments de dynamique relativiste

.....

.....

.....

.....

Rq= Expression de la deuxième Loi de Newton en relativité restreinte :

.....



L'énergie d'une particule est définie par : $\underline{p} = \begin{pmatrix} E \\ \underline{c} \\ \underline{p} \end{pmatrix}$ d'où,

$$E = \gamma(v)mc^2$$

Or la pseudo-norme de \underline{p} donne $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$ donc :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Si une particule est au repos dans le référentiel d'étude, $\vec{p} = \vec{0}$

donc : $E_0 = mc^2$ énergie au repos de la particule

Son énergie cinétique s'exprime :

$$E_c = E - E_0 = (\gamma(v) - 1)mc^2$$