Changements de référentiels - Référentiels non galiléens

Expérience introductive

Rappeler la définition du mot « référentiel »

. . . .

. . . .

. . . .

Dans quel référentiel se place-t-on pour observer les personnes dans la vidéo ?

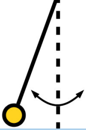
. . . .

Quel est leur mouvement dans ce référentiel ?

. . . .

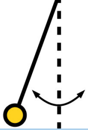
Faire le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur une personne.

Pourquoi les personnes restent-elles contre la paroi ?

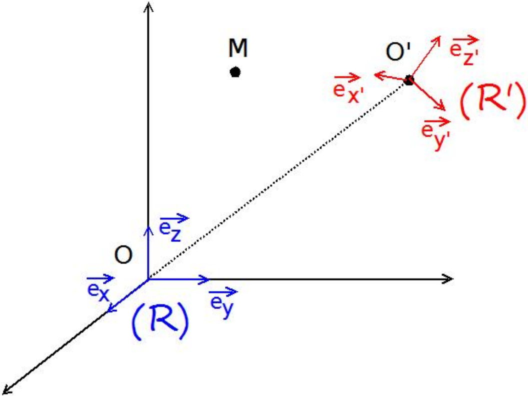


1

Cinématique



Repérage de l'espace



On caractérise le mouvement d'un référentiel $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R}')$ par :

- Son vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{R}')/(\mathcal{R})}$
- La vitesse $\overrightarrow{V}_{(\mathcal{R}')/(\mathcal{R})} = \overrightarrow{v_{(\mathcal{R})}}(O')$

Cas où $(\mathcal{R}')$ est en translation par rapport à $(\mathcal{R})$

On considère un évènement ponctuel (une explosion par exemple) observé dans deux référentiels différents $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ avec $(\mathcal{R}')$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $(\mathcal{R})$.

$$E_{(\mathcal{R})} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{(\mathcal{R}')} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

Si à $t = t' = 0$ on a $O \equiv O'$ et $\overrightarrow{v_{(\mathcal{R})}}(O') = v_e \overrightarrow{e_x}$ alors

$$E = \begin{cases} x = x' + v_e t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

La dernière équation suppose que le temps s'est écoulé de la même manière dans les deux référentiels. Cela n'est vrai que dans le cas où $v_e \ll c$ (relativité galiléenne).
Dans le cas contraire $t \neq t'$ (dilatation des durées en relativité restreinte d'Einstein : le temps ne s'écoule pas de la même manière dans deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre).

En relativité galiléenne on n'étudie donc que les 3 premières équations définissant l'évènement E qui peuvent se généraliser pour un point M de l'espace sous la forme vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{v}_{(\mathcal{R}')/(\mathcal{R})} t$$

Dans le cas d'un point en translation, les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_{x'}}$, $\overrightarrow{e_{y'}}$ et $\overrightarrow{e_{z'}}$ sont constants.

$$\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}} + z'\overrightarrow{e_{z'}}$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R}')} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{v}(O')_{(\mathcal{R})} + \overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R}')}$$

Définitions :

On appelle « point coïncident » M_c le point confondu avec M à l'instant t mais fixe dans $(\mathcal{R}')$.
On appelle « vitesse d'entraînement du point M » la vitesse du point coïncident M_c dans $(\mathcal{R})$.

$$\vec{v_e}(M) = \vec{v}(M_c)_{(\mathcal{R})}$$

Si on applique la relation précédente au point M_c :

$$\vec{v}(M_c)_{(\mathcal{R})} = \vec{v}(O')_{(\mathcal{R})} + \vec{v}(M_c)_{(\mathcal{R}')} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_e}(M) = \vec{v}(O')_{(\mathcal{R})}$$

Loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')} + \vec{v_e}(M)$$

De même pour les accélérations :

$$\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}')} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \ddot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \ddot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}$$

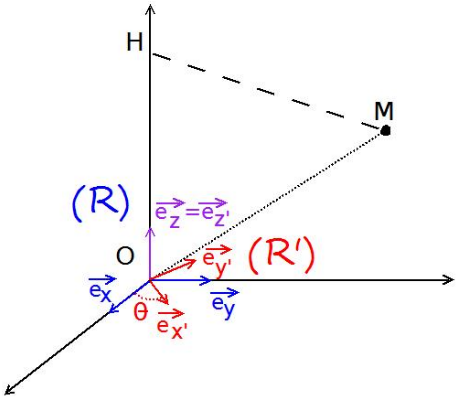
Loi de composition des accélérations :

$$\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}')} + \overrightarrow{a}_e$$

avec $\overrightarrow{a}_e = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_e}}{\mathrm{d}t}$

Remarque : Si $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{cte}$ alors $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{0}$

Cas où $\mathcal{R}'$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$ autour d'un axe fixe



$$\begin{cases} \overrightarrow{e_{x'}} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_{y'}} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x'}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_{y'}} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y'}}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_{x'}}$$

On note $\omega = \dot{\theta} = cte$; $\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{cte}$

$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_{x'}} \wedge \overrightarrow{e_{y'}}$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x'}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_{x'}} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{x'}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y'}}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_{y'}} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{y'}} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z} = x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}} + z\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R}')} = \dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}\overrightarrow{e_{z'}}$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} + x'\dot{\overrightarrow{e_{x'}}} + y'\dot{\overrightarrow{e_{y'}}}$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} + x'\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{y'}}$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{\omega} \wedge (x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}} + z'\overrightarrow{e_{z'}})$$

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R}')} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

On applique cette relation au point coïncident :
$\overrightarrow{v}(M_c)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{v}(M_c)_{(\mathcal{R}')} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{v_e}(M)$

Loi de composition des vitesses

$$\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R}')} + \overrightarrow{v_e}(M)$$

Avec $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\omega}\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}$

De même pour les accélérations :

$$\vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')} = \ddot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \ddot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \ddot{z}\overrightarrow{e_{z'}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)_{(\mathcal{R})}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}\overrightarrow{e_{z}} + x'\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{e_{x'}} + y'\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{e_{y'}}) \\
\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} &= \ddot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \ddot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \ddot{z}\overrightarrow{e_{z}} + \dot{x}'\dot{\overrightarrow{e_{x'}}} + \dot{y}'\dot{\overrightarrow{e_{y'}}} + \dot{z}\dot{\overrightarrow{e_{z}}} \\
&\quad + \dot{x}'\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{e_{y'}} + x'\vec{\omega}\wedge\dot{\overrightarrow{e_{x'}}} + y'\vec{\omega}\wedge\dot{\overrightarrow{e_{y'}}} \\
\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} &= \overrightarrow{a(M)}_{(\mathcal{R}')} + 2\vec{\omega}\wedge(\underbrace{\dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}}}_{+\dot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}}) \\
&\quad + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(\underbrace{x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}}}_{=\overrightarrow{HM}})) \\
\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} &= \overrightarrow{a(M)}_{(\mathcal{R}')} + 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v(M)}_{(\mathcal{R}')} - \omega^2\overrightarrow{HM}
\end{aligned}$$

On applique la relation précédente au point coïncident : $\overrightarrow{a}(M_c)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} - \omega^2 \overrightarrow{HM_c} = \overrightarrow{a_e}(M)$

Loi de composition des accélérations

$$\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}')} + \overrightarrow{a_c}(M) + \overrightarrow{a_e}(M)$$

Avec :

- $\overrightarrow{a_e}(M) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$
- $\overrightarrow{a_c}(M) = 2\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(\mathcal{R}')}$

2

Dynamique en référentiel non galiléen

Référentiels non galiléens

Défnition

On postule l'existence de référentiels dans lesquels un point matériel soumis à une résultante de forces nulle possède un mouvement rectiligne uniforme et inversement (Première loi de Newton)

Soient 2 référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ galiléens

On observe dans un référentiel $(\mathcal{R})$ galiléen, un point matériel M mécaniquement isolé : $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$

donc $\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{0}$

Soit $\overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{v}(M)_{(\mathcal{R}')} + \overrightarrow{v_e}(M)$

Donc $\overrightarrow{v_e}(M) = \overrightarrow{cte}$

Les deux référentiels sont . . . .

Généralisation : Notion de relativité galiléenne

Soit un point M soumis à des forces extérieures.
$m\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$ et $m\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}')} = \sum \overrightarrow{F'}_{ext}$

Si $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ sont galiléens, $\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}')}$

donc

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \sum \overrightarrow{F'}_{ext}$$

Les lois de la mécanique sont . . . .

Principe Fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen

Soit un point matériel M de masse m étudié dans $(\mathcal{R}_g)$ galiléen,

PFD : $m\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}_g)} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

Soit $(\mathcal{R}')$ un autre référentiel d'étude non galiléen

$$\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}')} + \overrightarrow{a_c}(M) + \overrightarrow{a_e}(M)$$

Donc $m\overrightarrow{a}(M)_{(\mathcal{R}')} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} - \overrightarrow{a_c}(M) - \overrightarrow{a_e}(M)$

On pose :

- $\overrightarrow{f_{ie}} =$
- $\overrightarrow{f_{ic}} =$

PFD appliqué au point M, dans $(\mathcal{R}')$ non galiléen :

$(\mathcal{R}')$ en translation (non uniforme) par rapport à $(\mathcal{R}_g)$

$\overrightarrow{f_{ie}} =$

$\overrightarrow{f_{ic}} =$

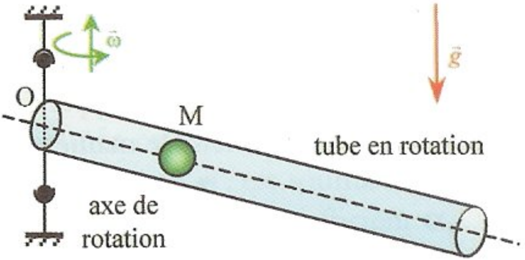
$(\mathcal{R}')$ en rotation uniforme par rapport à $(\mathcal{R}_g)$ $(\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{cte})$

$\overrightarrow{f_{ie}} =$

$\overrightarrow{f_{ic}} =$

Application 1 : Tube en rotation

On considère un tube creux tournant à une vitesse angulaire ω autour d'une de ses extrémités, dans le plan horizontal. Une bille notée M de masse m est maintenue à une distance r_0 de l'axe. À l'instant initial la bille est libérée et peut se déplacer sans frottement dans le tube.



1. Le référentiel du tube peut - il être considéré comme galiléen ?
2. Établir l'équation du mouvement dans le référentiel du tube.
3. Exprimer la réaction normale du support.

Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen

TMC pour un point M étudié en référentiel non galiléen :

Théorème de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen

TEC pour un point M étudié en référentiel non galiléen :

Étude de $W(\overrightarrow{f_{ic\,(\mathcal{R}')}})$

Énergie mécanique en référentiel non galiléen

$$\mathcal{E}_M(M)_{(\mathcal{R}')} = \mathcal{E}_c(M)_{(\mathcal{R}')} + \sum \mathcal{E}_p(M)_{(\mathcal{R}')}$$

Énergie potentielle liée à $\overrightarrow{f_{ic}}$?

. . . .

. . . .

Énergie potentielle liée à $\overrightarrow{f_{ie}}$?

- Cas d'un référentiel en rotation pure par rapport à $(\mathcal{R}_g)$ galiléen :

. . . .

. . . .

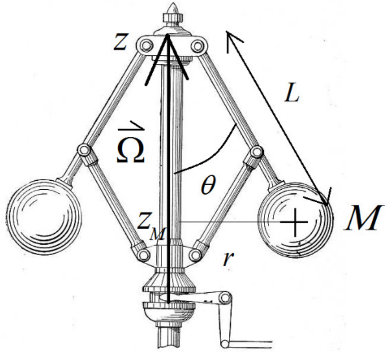
Cas d'un référentiel en translation uniformément accéléré par rapport à $(\mathcal{R}_g)$ galiléen :

$\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(O')_{(\mathcal{R}_g)}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{cte}$

(ne dépend ni de t ni de M)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,ie}(M)_{(\mathcal{R}')} &= -\delta W(\overrightarrow{f_{ie}}_{(\mathcal{R}')}) \\ &= -m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(O')_{(\mathcal{R}_g)}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{O'M}\end{aligned}$$

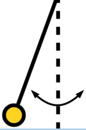
Application 2 : Le régulateur de Watt



Le régulateur de Watt est un système ingénieux mis en place dans des machines pour réguler leur vitesse : plus la machine tourne vite et plus les boules du régulateur se soulèvent, actionnant une valve qui diminue l'arrivée de combustible, faisant ainsi diminuer la vitesse de rotation.

Soit une boule de masse m assimilée à un point matériel M, lié par une tige de longueur L à un axe Oz qui tourne avec un vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} = \Omega \overrightarrow{e_z}$. M se trouve à la distance r de Oz. On prendra l'origine $z = 0$ de l'axe Oz à l'accroche de la tige.

1. Exprimer l'énergie potentielle d'une boule en fonction de θ et Ω
2. En déduire l'altitude z_M de M qui correspond à un équilibre.
3. Préciser la condition d'existence de cette position d'équilibre.
4. Vérifier qu'il s'agit bien d'une position d'équilibre stable.



3

Caractère galiléen approché de quelques référentiels courants

Quelques référentiels courants

Référentiel de Copernic :

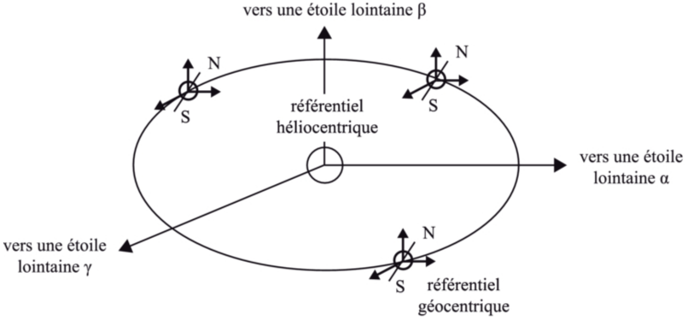
Centré au centre de masse du système solaire et pointe vers 3 étoiles lointaines

Référentiel héliocentrique (Référentiel de Kepler)

- Centré au centre du Soleil et pointe vers 3 étoiles lointaines
- Il est en translation circulaire autour du référentiel de Copernic
- En CPGE on le considère souvent comme le référentiel galiléen de référence

Référentiel géocentrique :

- Centré au centre de la Terre et pointe vers 3 étoiles fixes
- En translation elliptique autour du référentiel héliocentrique
- Souvent considère comme un bon référentiel galiléen mais certains phénomènes témoignent du caractère approximatif de cette considération (exemple : Marées océaniques)



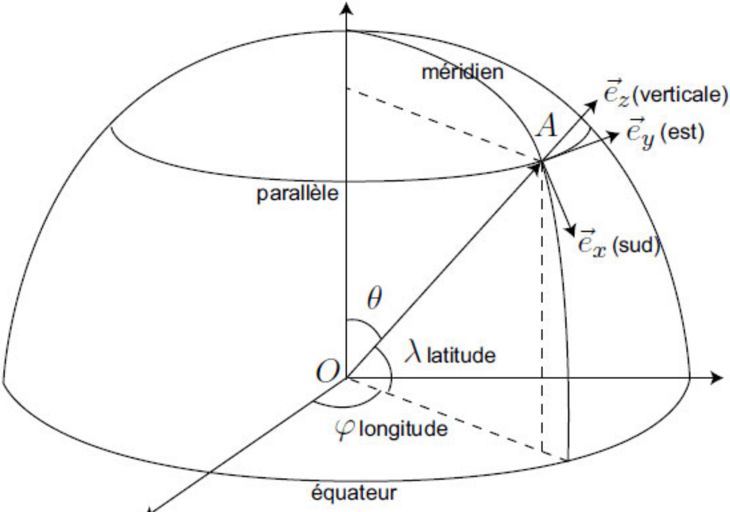
Référentiel Terrestre

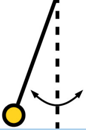
- Lié à un point de la Terre
- En rotation uniforme autour du référentiel géocentrique

À quelle condition peut-on considérer que le référentiel terrestre est un bon référentiel galiléen ?

Les particularités du référentiels terrestre

Étudions dans $(\mathcal{R}_T)$ non galiléen un objet simplement posé sur le sol à Paris (on considère $(\mathcal{R}_{geo})$ galiléen)





Équilibre mécanique :

$$\overrightarrow{F}_{gravit} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}} = \overrightarrow{0}$$

Estimer la norme de chacun de ces termes. ($M_T = 5.9 \times 10^{24}$ kg)

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Définition du poids pour $(\mathcal{R}_T)$ non galiléen

. . . .

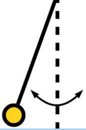
. . . .

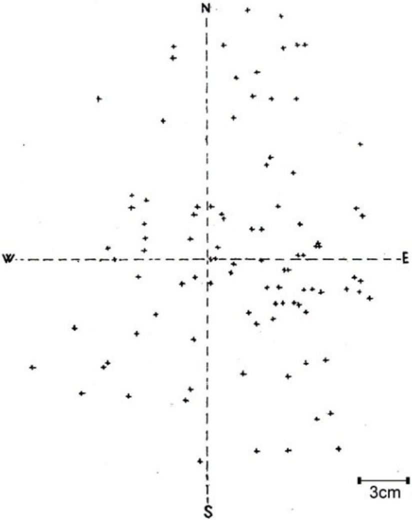
Définition du poids pour $(\mathcal{R}_T)$ non galiléen

Application 3 : Déviation vers l'est

Soit un point matériel M, de masse m, lâché sans vitesse initiale d'une altitude h par rapport au sol.

1. On suppose que le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_T$ est galiléen.
   1.1 Quel est le point d'impact sur le sol ?
   1.2 Exprimer la vitesse v du point matériel , ainsi que la durée de la chute Δt.
2. On constate expérimentalement qu'il existe une légère déviation Δy, toujours dirigée vers l'Est ($\Delta y \ll h$). Cette observation peut-elle s'expliquer par des sources d'incertitude d'ordre expérimentale ?





Mesures de point d'impact effectuées par Ferdinand Reich (1831) dans les conditions suivantes :

- $\lambda = 51\,^\circ$
- $h = 158\,\mathrm{m}$
- $R_T = 6371\,\mathrm{km}$
- $M_T = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- $\mathcal{G} = 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}$
- $T_J = 23$ h 56 min 4 s

3. Déterminer la valeur de l'intensité de la pesanteur dans les conditions précisées ci-dessus.
4. Par une méthode perturbative, montrer que la déviation vers l'Est s'explique en tenant compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre et calculer la valeur de cette déviation
5. Comparer les résultats obtenus avec la résolution numérique proposée en langage Python.