MP*
MPI*

Propagation des ondes sans amortissement

1 Ondes transversales le long d'une corde

On considère une corde inextensible, de longueur L, de masse linéique μ tendue avec une force $\overrightarrow{T_0}$. Au repos, la corde est parfaitement horizontale. En $x = 0$ un vibreur permet de déplacer verticalement la corde. On observe alors un déplacement de la perturbation le long de la corde.

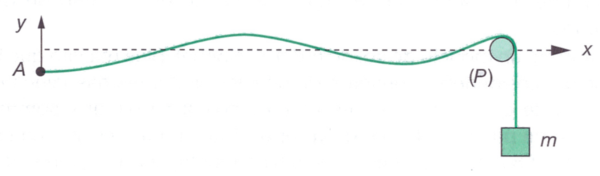

FIGURE 1 – Propagation d'une onde transversale dans une corde tendue

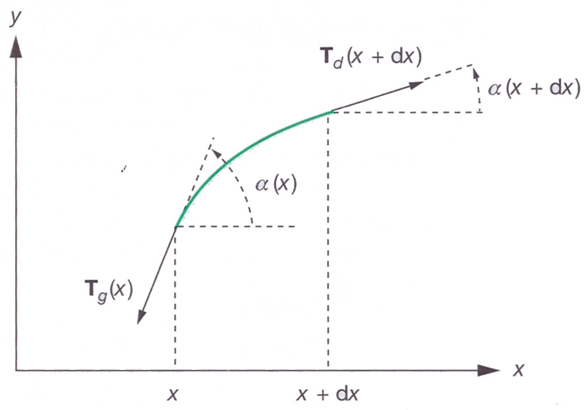

FIGURE 2 – Paramétrage

1. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à une portion de corde de longueur mésoscopique $d\ell$ en négligeant tout frottement.
2. Déterminer l'équation d'onde dans l'approximation de petites perturbations.
3. La corde est désormais tendue et fixe à ses extrémités. Proposer une famille de solutions permettant d'étudier les modes propres de la corde.
4. Déterminer les pulsations propres de la corde.

2 Propagation sans perte d'un signal dans un câble coaxial

Une portion de câble coaxial transmet un signal le long d'un axe (Oz). Chaque portion de longueur élémentaire dz est modélisé par une cellule (R,L) (modèle de la ligne sans perte).

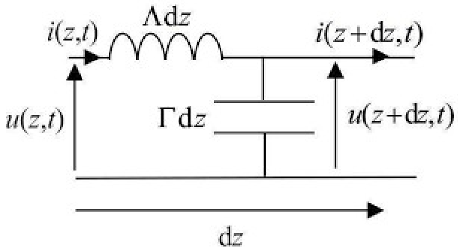

FIGURE 3 – Modèle de la ligne sans perte

Données :

- Capacité linéique : $\Gamma = 92{,}4\,\mathrm{pF/m}$
- Inductance linéique : $\Lambda = 241\,\mathrm{nH/m}$

Dans toute la suite on suppose qu'on peut définir $i(z,t)$ et $u(z,t)$ l'intensité et la tension en z, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

1. En appliquant la loi des nœuds montrer que $\dfrac{\partial i}{\partial z} = -\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}$.
2. En appliquant la loi des mailles montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}$.
3. En déduire que $i(z,t)$ et $u(z,t)$ vérifient une équation de D'Alembert.
4. Quelle est la valeur de la célérité c des ondes dans le câble ?
5. Quelle est la forme générale des solutions de cette équation pour $i(z,t)$ et $u(z,t)$.

Un signal se propage dans le câble selon les z croissants.

6. Justifier qu'il est pertinent de s'intéresser à un signal sinusoïdal.
7. Quelle est la vitesse de phase du signal. Que peut-on en conclure ?

3 Propagation des ondes sonores dans un solide

Le son correspond à la propagation d'une vibration d'un milieu matériel (solide ou fluide). Il s'agit d'un phénomène ondulatoire où une perturbation longitudinale du milieu se propage de proches en proches.

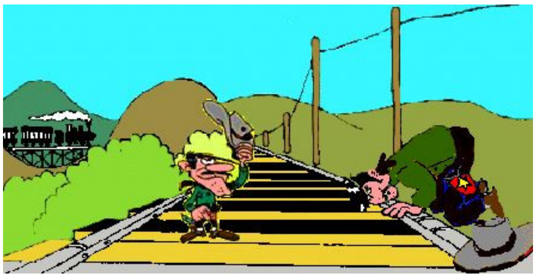

Figure 4 – Pourquoi colle-t-il son oreille sur le rail ?

Dans un solide, on représente les différents atomes constituant un solide par une chaîne infinie de masses ponctuelles (m) reliées entre elles par des ressorts (chaîne d'atomes élastiquement liés)

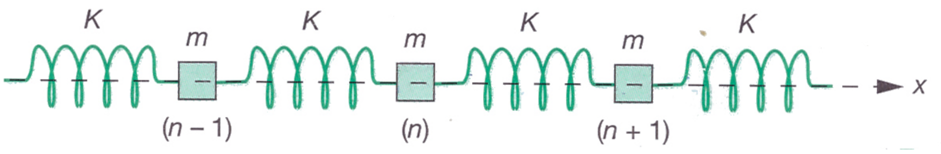

Figure 5 – Modèle de la chaine infinie d'atomes élastiquement liés

Chaque ressort est de longueur à vide l_0 et de raideur K. La position à l'équilibre de l'atome n est notée $x_{eq,n}$. La position hors équilibre de l'atome n est notée $x_n = nl_0 + \xi_n(t)$ où $\xi_n(t)$ est le petit déplacement du n$^{\mathrm{e}}$ atome de la chaine par rapport à sa position d'équilibre ($\xi_n < l_0 \quad \forall n$). Les atomes sont à l'équilibre dans les directions (Oy) et (Oz) orthogonales à (Ox).

1. Appliquer le PFD à l'atome n.

On construit alors une fonction $\xi(x,t)$ (de classe C^2) telle que $\xi(x = nl_0, t) = \xi_n(t)$.

2. En s'appuyant sur un développement de Taylor, déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\xi(x,t)$

On considère un élément de surface $\mathrm{d}^2S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ d'un solide orthogonal à la direction de propagation de la perturbation

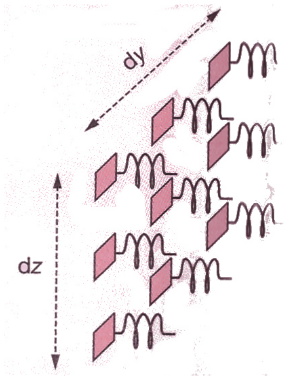

Figure 6 – Modélisation d'une tranche de rail

On pose $Y = \dfrac{K}{l_0}$. Y est appelé le module d'Young du matériau.

Une onde sonore se propage le long d'une barre de masse volumique μ et de section S dans la direction (Ox). Un considère une tranche de cette barre comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ en l'absence de perturbation et comprise entre $x + \xi(x,t)$ et $x + \mathrm{d}x + \xi(x + \mathrm{d}x, t)$ sinon.

3. Déterminer puis calculer la célérité de l'onde en fonction de Y et de μ. Comparer cette expression avec la célérité des ondes transversales dans une corde.

Données : $\mu = 7{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$ $\qquad Y = 208\,\mathrm{GPa}$