MP* MPI* Propagation des OEM dans le vide illimité

Exercice 1 Ondes planes émises par un laser

Un laser utilisé en TP émet un faisceau très directionnel de puissance $< \mathcal{P} >= 1\,\mathrm{mW}$, de section $s = 4\,\mathrm{mm}^2$ constante en première approximation modélisé par une onde plane monochromatique dont le champ électrique est de la forme $\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \cos(k(z-ct)+\varphi_0)\overrightarrow{e_x}$

1. Décrire précisément les différents termes intervenant dans cette écriture et leur sens physique.
2. Décrire la polarisation de l'onde.
3. Montrer en, en écrivant la relation de dispersion que l'on peut écrire $\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \cos(kz-\omega t+\varphi_0)\overrightarrow{e_x}$
4. Exprimer la vitesse de phase de l'onde. Commenter.
5. Exprimer le champ magnétique associé à cette onde.
6. Exprimer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R}$. En déduire l'expression littérale de l'amplitude du champ électrique en fonction de $< \mathcal{P} >$, s, c et ϵ_0 puis donner sa valeur numérique.

Exercice 2 Émission isotrope de charges

Une bille de cuivre fixe de rayon a suffisamment faible par rapport aux autres distances considérées dans cet exercice pour que cette bille soit confondue avec son centre O, initialement neutre, émet des électrons de manière isotrope à partir d'un instant $t = 0$. Le nombre d'électrons émis par unité de temps est une constante α et les électrons sont émis avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_r}$ où v_0 est une constante. On néglige les forces électromagnétiques subies par les électrons.

1. Déterminer la densité volumique de charge en exprimant la charge comprise entre deux sphères de rayon r et $r + \mathrm{d}r$. En déduire que la densité de courants $\overrightarrow{j}(r,t)$ vaut :

$$\overrightarrow{j}(r > v_0 t, t) = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{j}(r < v_0 t, t) = \frac{-\alpha e}{4\pi r^2}\overrightarrow{u_r}$$

2. Déterminer l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$.
3. Montrer que les équations de Maxwell sont compatibles avec un champ $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.
4. On admet que le couple $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ est effectivement l'unique couple solution des équations de Maxwell. Exprimer les grandeurs énergétiques locales u_{em}, $\overrightarrow{\Pi}$ et $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$.
5. Interpréter les transferts d'énergie qui on lieu et pointer une incohérence avec l'hypothèse de mouvement rectiligne et uniforme des électrons.

Exercice 3 Pression de radiation

Soit une onde plane monochromatique, de fréquence ν, se propageant dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_x}$, dont le champ électrique est $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$. On rappelle que l'éclairement $\mathcal{E}$ est la puissance moyenne qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation.

1. Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de ϵ_0, c et E_0.
2. Exprimer le nombre N_0 de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à (Ox) en fonction de $\mathcal{E}$, de ν et de la constante de Planck h.

L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à (Ox), d'aire S, parfaitement réfléchissante.

3. Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi en fonction de $\mathcal{E}$, S et c ?

4. Exprimer la pression subie par la paroi en fonction de $\mathcal{E}$ et c puis en fonction de ϵ_0 et E_0.
5. Quelle serait l'expression de la pression si la paroi était parfaitement absorbante ?
6. Calculer $\mathcal{E}$, E_0 et p sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre $d = 5{,}0\,\text{mm}$ et une puissance moyenne $\mathcal{P} = 1{,}0 \times 10^2\,\text{W}$

On considère maintenant au l'onde est absorbée par une sphère de rayon a très inférieur au rayon du faisceau.

7. Exprimer la force $\overrightarrow{F}$ subit par la sphère en fonction de $\mathcal{E}$, a et c.

Le Soleil $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}\,\text{kg}$ donne au voisinage de la Terre (juste au dessus-de de l'atmosphère terrestre) l'éclairement $\mathcal{E} = 1{,}4 \times 10^3\,\text{W/m}^2$. La distance Terre-Soleil est égale à $D = 150 \times 10^6\,\text{km}$,

8. Quelle est la puissance $\mathcal{P}_0$ émise par le Soleil ?

Un objet sphérique, de rayon a, de masse volumique μ est, dans le vide interplanétaire, à la distance r du Soleil et absorbe le rayonnement solaire.

9. Évaluer le rapport entre la force due à l'absorption du rayonnement solaire et la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur cet objet dans les deux cas suivants :
   — cas d'une météorite : $\mu = 3{,}0 \times 10^3\,\text{km/m}^3$ et $a = 1{,}0\,\text{m}$
   — cas d'une poussière interstellaire : $\mu = 1{,}0 \times 10^3\,\text{km/m}^3$ et $a = 0{,}10\,\mu\text{m}$

Exercice 4 Antenne assimilable à un dipôle oscillant

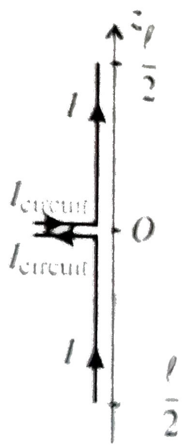

FIGURE 1 – Schématisation de l'antenne

On considère une antenne hertzienne de taille ℓ très petite, alimentée en son milieu par un circuit qui délivre l'intensité :

$$I_{\text{circuit}} = I_0 \cos(\omega t)$$

Dans l'antenne, l'intensité I dépend de z et du temps et elle est nulle aux deux extrémités de côte $z = \pm\dfrac{\ell}{2}$; la longueur ℓ étant petite, on modélise l'intensité dans l'antenne par une loi linéaire :

$$I(z,t) = I_{\text{circuit}}(t)\left(1 - \frac{2|z|}{\ell}\right)$$

1. Préciser l'hypothèse « ℓ est très petite » pour que l'antenne soit un dipôle oscillant.
2. En utilisant la loi locale de conservation de la charge sous la forme $\dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = -\dfrac{\partial I}{\partial z}$, trouver la densité linéique de charge $\lambda(z,t)$ le long du fil.
3. En déduire le moment dipolaire instantané de l'antenne.

Exercice 5 Rayonnement d'une antenne demi-onde

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe Oz, de longueur $\ell = \dfrac{\lambda}{2}$, centrée à l'origine, est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité :

$$\underline{I}(z,t) = I_0 \cos\left(2\pi\frac{z}{\lambda}\right)\exp(i\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) d'origine O, d'axe (Oz). On se place dans la zone de rayonnement.
On admet que le champ magnétique total rayonné en M par l'antenne est :

$$\underline{\overrightarrow{B}}(M,t) = i\frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\overrightarrow{u_\varphi},$$

et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive de direction $\overrightarrow{u_r}$.

1. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting. Dans quelle direction l'antenne rayonne-t-elle le maximum d'énergie ? Représenter l'indicatrice de rayonnement.
2. Calculer la puissance moyenne$\mathcal{P}$ rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r.
3. En déduire la résistance de rayonnement de l'antenne définie par $\mathcal{P} = RI_{eff}^2$. Calculer R.

4. Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est $\mathcal{P} = 2100\,\text{kW}$? (Puissance d'un émetteur Grandes Ondes France Inter)

Données :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 1,22$$

Exercice 6 Bleu du ciel et rouge du soleil couchant

Pour décrire l'interaction entre les molécules de l'atmosphère et le rayonnement électromagnétique du soleil, on adopte le modèle de l'électron élastiquement lié :

— les noyaux atomiques sont fixes ;

— chaque électron (de masse $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ et de charge $q = -e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$) est traité indépendamment des autres et considéré comme soumis, en plus de la force exercée par le champ électromagnétique, une force de rappel élastique $\overrightarrow{F} = -m_e\omega_0^2\overrightarrow{r}$ où $\overrightarrow{r}$ est le déplacement de l'électron par rapport à sa position au repos, et à une force dissipative modélisée comme un frottement fluide $\overrightarrow{F_f} = -\dfrac{m_e}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$.

On prend pour valeurs des paramètres du modèle :$\omega_0 = 2{,}0 \times 10^{16}\,\text{rad/s}$ et $\tau = 1 \times 10^{-8}\,\text{s}$.

On étudie le mouvement forcé d'un électron sous l'action du champ électromagnétique. Le champ électrique associé à l'onde excitatrice s'exprime $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\exp(i(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x}$. On admet que la vitesse des électrons reste très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide c.

1. Écrire l'équation du mouvement de l'électron en faisant une approximation classique.
2. On cherche la solution sous la forme $\underline{\overrightarrow{r}} = \underline{\overrightarrow{r_0}}\exp(i(\omega t - kz)$. Déterminer $\overrightarrow{r_0}$.
3. En déduire le moment dipolaire induit par l'onde sous la forme $\underline{\overrightarrow{p}} = \underline{\overrightarrow{p_0}}\exp(i(\omega t - kz)$
4. Simplifier l'expression de $\underline{\overrightarrow{p_0}}$ en tenant compte des valeurs numériques données et sachant que l'onde excitatrice est une onde lumineuse.
5. Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}_r$ rayonnée par ce dipôle oscillant en fonction de E_0, ω et de paramètres caractéristiques du modèle.
6. Expliquer à l'aide de ce modèle la couleur bleue du ciel.
7. Rappeler l'intensité I de l'onde excitatrice en fonction de E_0
8. Exprimer la puissance rayonnée sous la forme $\mathcal{P}_r = \sigma(\omega)I$. Quelle est la dimension de $\sigma(\omega)$?

Le milieu contient une densité volumique d'électrons $n = 3{,}0 \times 10^{26}\,\text{m}^{-3}$. L'énergie rayonnée par ces électrons est prélevée à l'onde incidente ce qui fait que l'intensité $I(z)$ diminue quand z augmente.

9. A l'aide d'un bilan d'énergie sur un cylindre situé entre z et $z + \mathrm{d}z$, montrer que $I(z)$ vérifie une équation de la forme :
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} + \frac{1}{\delta}I(z) = 0$$
Exprimer δ et donner sa signification physique. Exprimer $I(z)$.
10. Calculer δ pour une lumière bleue et pour une lumière rouge. Expliquer alors la couleur rouge du soleil couchant.

Exercice 7 Émetteur TNT suisse

La Barillette est un sommet du Jura situé dans le canton de Vaud en Suisse culminant à 1528 m d'altitude dans le massif de la Dôle. La Barillette est située au nord de Genève (Carré noir), sa localisation est repérée sur la carte par un rond noir. L'échelle est indiquée par le bandeau en haut à gauche et dont la longueur totale représente 100 km.

FIGURE 2 – Carte de la Suisse

Le sommet de la Barillette accueille le principal émetteur de télévision et FM de la société suisse de radiodiffusion et de télévision (SGR SSR) desservant le sud-ouest de la Suisse. Le pylône contenant les antennes émettrices mesure 120 m de hauteur.

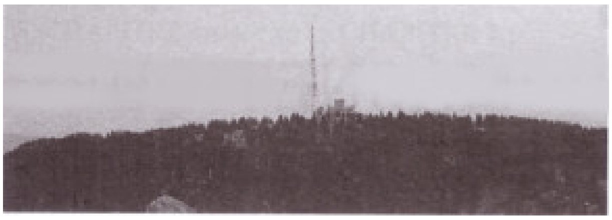

FIGURE 3 – Émetteur de la Barillette

Sont émises par l'antenne notamment des chaînes de la TNT sur le canal 34 de la bande V centré sur 578 MHz. La courbe en trait plein représente l'indicatrice de rayonnement pour ce canal (la courbe en trait pointillé correspond au canal 69 de la bande H qui n'est plus utilisé depuis la suppression de la télévision analogique). L'échelle radiale correspond à la chute en décibels par rapport à la direction de plus grand rayonnement.

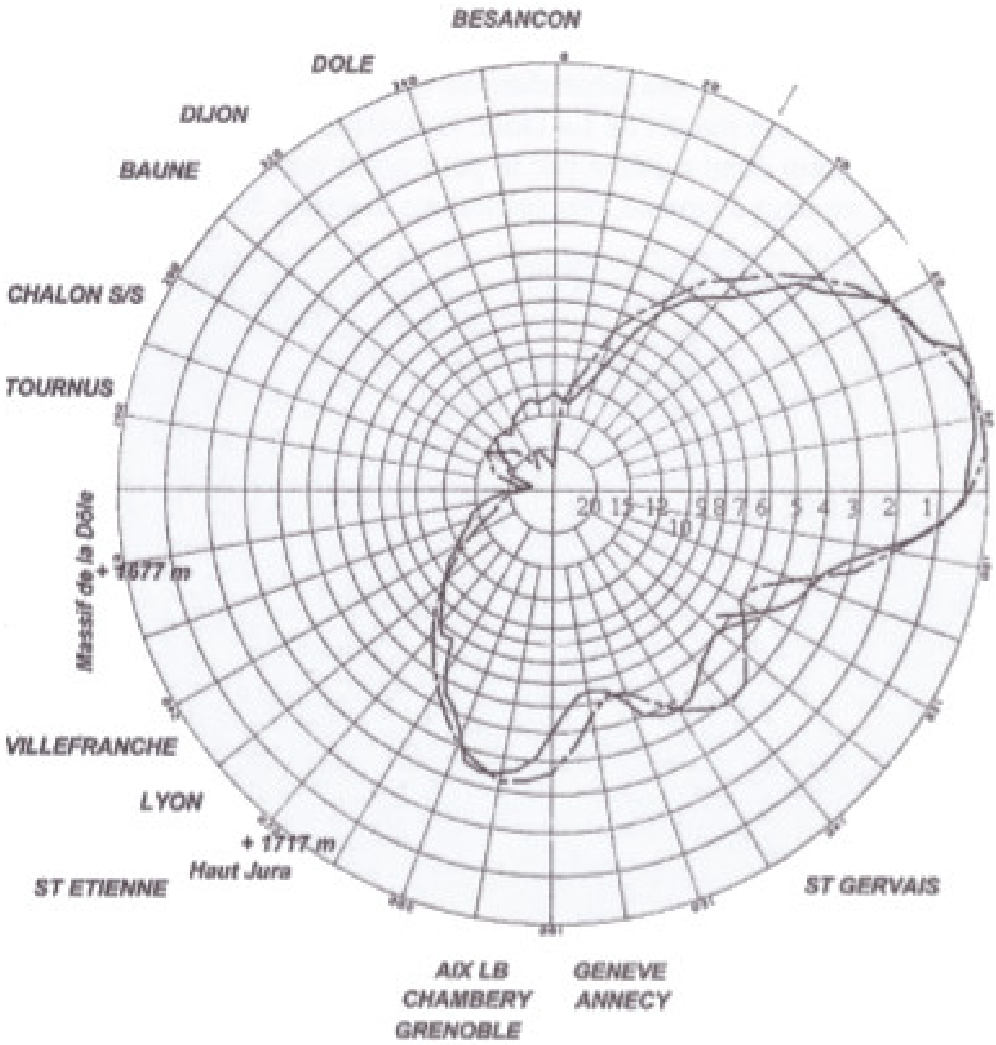

FIGURE 4 – indicatrice de rayonnement

1. Peut-on appliquer l'ARQS si l'on désire étudier le courant circulant le long du pylône ?
2. Expliquer ce que représente une indicatrice de rayonnement
3. Définir et indiquer la fenêtre angulaire d'émission à $-3\,\mathrm{dB}$ de l'antenne
4. Expliquer en quoi l'indicatrice de rayonnement est bien adaptée au site d'implantation de l'antenne.
5. De quel facteur la puissance des signaux TNT suisse rayonnée vers Dijon est-elle plus faible que celle rayonnée par l'antenne en direction de l'est ?
6. En faisant l'hypothèse que la puissance totale émise par l'antenne afin que les suisses habitant près de la frontière avec la France aux alentours de Genève puissent capter la TNT, estimer la distance maximale de réception de la TNT dans la direction de fort rayonnement de l'antenne.