MP* MPI* — OEM dans les plasmas

Exercice 1 — Réflexion-transmission à l'interface vide-plasma

Un plasma occupe le demi-espace $z \geq 0$ (le demi-espace $z \leq 0$ est vide). Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement arrive en incidence normale sur ce plasma.

$$\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 \exp[i(\omega t - k_0 z)]\overrightarrow{u_x}, \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

On rappelle que dans un plasma peu dense, la relation de dispersion s'exprime $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.
On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique en $z = 0$.

1. En admettant que les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont continues, exprimer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n} = \dfrac{\underline{k}}{k_0}$
2. En déduire les coefficients de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission $\mathcal{T}$ en énergie en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ et $\mathfrak{Re}(\underline{n})$
3. Calculer $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ pour $\omega < \omega_p$.
4. Exprimer $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ en fonction de $\underline{n}$ pour $\omega > \omega_p$.
5. Déterminer une relation entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$. Quelle est le sens physique de cette relation ?

Exercice 2 — Ondes longitudinales dans un plasma

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense (densité volumique d'électrons n_0) dont le champ électrique s'écrit :

$$\overrightarrow{E} = E(x,t)\overrightarrow{u_x} = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x}$$

1. Caractériser cette onde. Que vaut le champ magnétique ?
2. Appliquer la relation fondamentale aux électrons et en déduire une relation entre la dérivée temporelle de la densité volumique de charge $\dfrac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{E}$.
3. À l'aide des équations de Maxwell, trouver une autre relation entre $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$.
4. Déterminer la relation de dispersion. Commenter.
5. Quelle est la vitesse de groupe pour cette onde ?
6. Calculer le vecteur de Poynting.
7. Évaluer l'énergie électromagnétique volumique.
8. Exprimer l'énergie cinétique volumique des électrons. Conclure.

Exercice 3 — Propagation d'une OEM dans un milieu isolant dilué

Sous l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_x}$, les électrons d'un milieu vibrent de manière colinéaire au champ électrique excitateur. Leur mouvement peut être caractérisé par l'équation différentielle :

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - f\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - eE$$

où x est le déplacement de l'électron, k et f des constantes du modèle.

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m_e}$, $\tau = \dfrac{m_e}{f}$ et $\omega_p^2 = \dfrac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}$.

m_e est la masse d'un électron et n_0 la densité volumique d'électron dans le milieu.

Une onde plane monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_x}$, se propage dans la direction de $\overrightarrow{u_x}$ dans ce milieu. Son champ électrique s'écrit :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \exp[i(\omega t - kz)]\overrightarrow{u_x}$$

1. Comparer l'équation différentielle avec celle obtenue pour un électron dans un plasma peu dense soumis à un champ électromagnétique. Quel est le sens physique des termes supplémentaires présent dans le cas de la propagation dans un milieu isolant.
2. On cherche une solution de l'équation différentielle en régime forcé sous la forme $\underline{x}(t) = \underline{x_0}\exp[i(\omega t - kz)]$. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{x_0}$ en fonction de E_0, ω_0, ω, τ et des grandeurs caractéristiques de l'électron.
3. Montrer que la densité volumique de charge est nulle.
4. Établir une équation aux dérivées partielles liant $\overrightarrow{E}$ et la densité volumique de courant.
5. En déduire la relation de dispersion du milieu. Quel phénomène traduit le fait que k est complexe ?

On néglige les phénomènes dissipatifs ($f = 0$). On suppose de plus que $\omega \ll \omega_0$

6. Rappeler la définition de l'indice optique d'un milieu et montrer que le modèle permet de retrouver la loi de Cauchy : $n = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide d'une onde de pulsation ω et A, B deux constantes caractéristiques du milieu. Exprimer A et B en fonction de ω_0 et ω_p

Exercice 4 Dispersion dans le plasma interstellaire

Le plasma interstellaire est constitué d'un gaz très peu dense d'électrons de masse m_e, de charge $-e$, de nombre volumique moyen $n_0 = 0{,}037\,\mathrm{cm}^{-3}$, en mouvement non relativiste, et d'ions supposés fixes. Il est localement neutre et le reste au passage d'ondes électromagnétiques. Avec ces hypothèses on cherche des solutions des équations de Maxwell sous la forme d'ondes planes progressives monochromatiques (OPPM) de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, de pulsation ω telles que :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{E_0}\exp[i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)] \text{ et } \underline{\overrightarrow{B}}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{B_0}\exp[i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)]$$

1. Montrer que de telles solutions n'existent que si la densité de courant $\overrightarrow{j}$ des électrons est elle-même une OPPM de même vecteur d'onde et de même pulsation, c'est à dire : $\underline{\overrightarrow{j}}(\overrightarrow{r},t) = \underline{\overrightarrow{j_0}}\exp[i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)]$.
2. Montrer que $\underline{\overrightarrow{j}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{k}$.
3. Écrire l'équation du mouvement de l'électron et montrer que l'effet du champ magnétique y est négligeable.
4. Montrer que les vecteurs $\underline{\overrightarrow{j}}$ et $\underline{\overrightarrow{E}}$ sont colinéaire et déterminer la conductivité $\underline{\sigma}$ du plasma. Commenter.
5. À l'aide des équations de Maxwell, exprimer $\underline{\overrightarrow{j_0}}$ en fonction de ω, $\overrightarrow{k}$ et $\underline{\overrightarrow{E_0}}$. En déduire une nouvelle expression de $\underline{\sigma}$.
6. On pose $K = \sqrt{\dfrac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}}$. Déterminer la relation de dispersion.
7. Établir les expressions des vitesses de phase et de groupe des ondes électromagnétiques dans le plasma. Quelle relation vérifient-t-elles ?
8. Deux trains d'ondes de longueur d'onde $\lambda_1 = 0{,}4\,\mu\mathrm{m}$ et $\lambda_2 = 0{,}8\,\mu\mathrm{m}$ sont émises au même instant par un objet stellaire situé à une distance $L = 1 \times 10^3$ al.
   Exprimer puis calculer la durée Δt entre les dates de réception des deux signaux.