**MP***
**MPI***

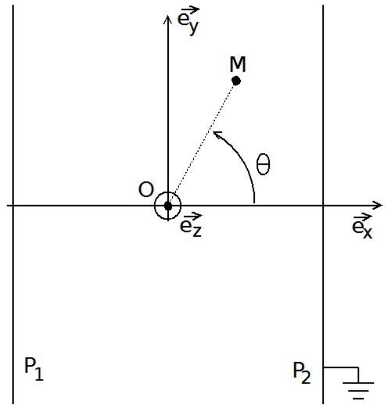
# Dipôle électrostatique

## Exercice 1 Dipôle électrostatique dans un champ uniforme

Deux plaques métalliques planes parallèles, $P_1$ et $P_2$, distantes de $e$, délimitent une région de l'espace vide telle que $\frac{-e}{2} < x < \frac{e}{2}$.

La plaque $P_1$ est reliée à la borne positive d'un générateur de force électromotrice $U$, la plaque $P_2$ est maintenue au potentiel 0 V.

Ce dispositif créé dans l'espace interconducteur un champ électrique uniforme et permanent $\overrightarrow{E_0} = E_0\overrightarrow{e_x}$.



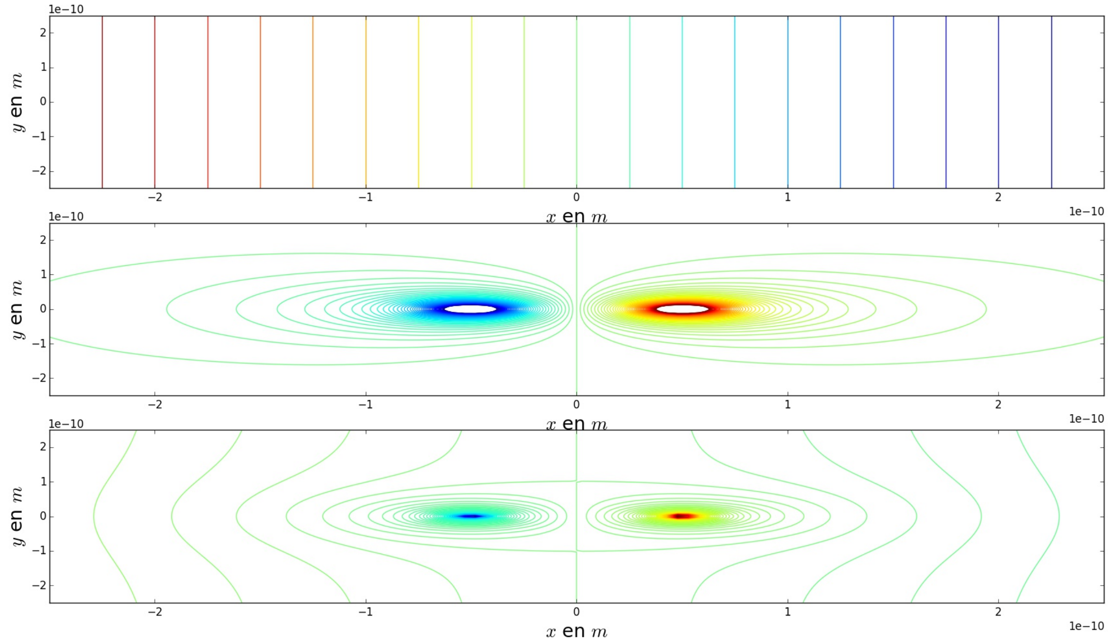

1. Exprimer la différence de potentiel $V(M_1) - V(M_2)$, en fonction de $E_0$ et $e$ pour $M_1 \in P_1$ et $M_2 \in P_2$.
2. Exprimer de même la différence de potentiel $V(M) - V(M_2)$ en fonction de $E_0$, $e$ et $x$ (abscisse de M), puis en fonction de $E_0$, $e$, $r$ et $\theta$ (coordonnées polaires de M).

Un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ est placé en un point O'. Onte $\overrightarrow{p} = p\overrightarrow{e_x}$ son moment dipolaire.

3. Exprimer le potentiel créé par ce dipôle au point M repéré par ses coordonnées polaires $r$ et $\theta$ si ce dipôle est modélisé par une charge $-q$ en A et une charge $+q$ en B avec $r \gg AB$, $q > 0$ et $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AB}$.
4. En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé en M par ce dipôle.

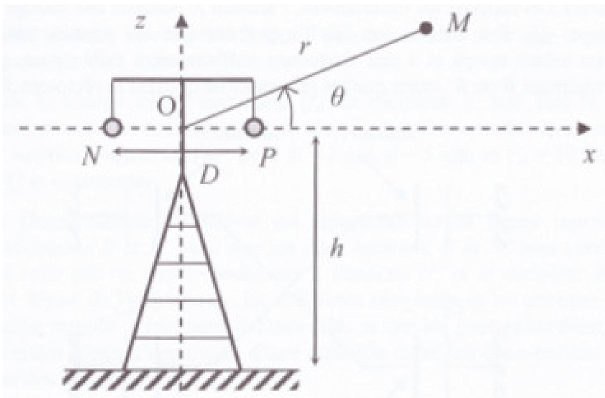
Le dipôle est placé en O de l'espace interconducteur de la première question, entre les plaques $P_1$ et $P_2$, dans le champ $\overrightarrow{E_0}$ où il peut tourner librement dans le plan de la figure autour de l'axe fixe (Oz). On suppose que le champ créé par les plaques n'est pas perturbé par l'introduction du dipôle.

5. Indiquer qualitativement l'action du champ $\overrightarrow{E_0}$ sur ce dipôle.
6. Préciser la position stable du dipôle.
7. Exprimer le potentiel électrostatique créé par la plaque et le dipôle en fonction de $p, r, \theta, E_0$...
8. Montrer, après avoir factorisé dans $V(M)$ la dépendance angulaire, qu'il existe une équipotentielle particulière formée par deux nappes de potentiel $U/2$.
9. Proposer un titre pour chacune des figures ci-après et tracer quelques lignes de champ.




## Exercice 2 Lignes THT

En France, le réseau d'alimentation électrique est formé de lignes triphasées dans lesquelles circule un courant alternatif à 50 Hz. Afin d'étudier le champ électrique à proximité de ces lignes tout en gardant un modèle simple, on ne considère qu'une ligne monophasée, constituée de deux câbles N et P cylindriques parallèles montés sur des pylônes de hauteur $h = 15\,\mathrm{m}$. Les câbles sont supposés de longueurs infinies, de rayon $R = 3\,\mathrm{cm}$ et séparés d'une distance $D = 3\,\mathrm{m}$ considérée comme grande devant $R$. On modélise la ligne électrique d'un point de vue électrostatique. A chaque instant les tensions dans les deux câbles sont opposés et on note $V_0$ la tension du câble P.




Du fait de l'inégalité $D \gg R$, on peut montrer que la charge par unité de longueur $q_L$ du câble $P$ a pour expression

$$q_L = \frac{\epsilon_0 V_0}{\ln\left(\dfrac{D}{R}\right)}$$

Le câble N porte une charge opposée à celle de P.

On repère un point m de l'espace par ses coordonnées polaires $(r, \theta)$, l'origine O étant placée au milieu de N et P. On peut alors montrer que le potentiel électrique $V_P(M)$ dont dérive le champ électrique créé par le câble P seul vaut :

$$V_P = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon_0}\ln(PM) + cte$$

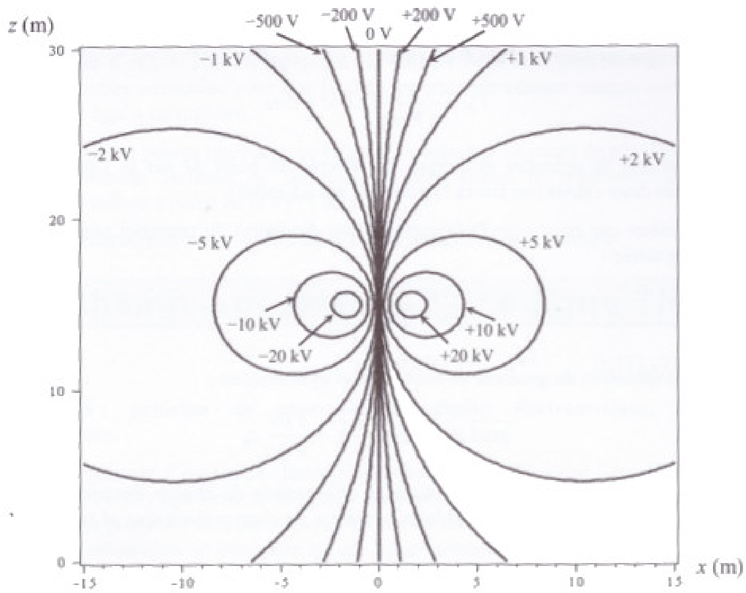
1. Exprimer le potentiel électrique $V(r, \theta)$ créé au point M par la ligne électrique constituée des deux câbles. (On fixera le potentiel nul à l'infini)
2. Montrer que pour $r \gg D$ (approximation dipolaire), le potentiel peut s'écrire de la manière approchée suivante :

$$V(r, \theta) \approx \frac{q_L D \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r}$$

3. Exprimer les composantes radiale et orthoradiale du champ électrique à grande distance de la ligne électrique et commenter sa dépendance en $r$ et en $\theta$.

4. En déduire la valeur du champ électrique $E_0$ au pied de la ligne électrique.

La figure suivante représente quelques lignes équipotentielles dans le voisinage de la ligne électrique. Sur cette figure, l'origine de l'altitude est placée au niveau du sol et les coordonnées $x$ et $z$ sont exprimées en mètres.




5. Les symétries de ces lignes étaient-elles prévisibles ? (justifier)
6. En déduire l'allure des lignes de champ électrique.
7. Expliquer comment déterminer la valeur du champ électrique au pied de la ligne électrique à partir de la seule étude de ces lignes équipotentielles.

En France, un arrêté du 12 mai 2001 fixe les limites d'exposition du public aux champs électromagnétique provoqués par les réseaux d'alimentation électrique : la position des ouvrages par rapports aux lieux normalement accessibles aux tiers doit être telle que le champ électrique résultant en ces lieux n'excède par 5 kV/m dans les conditions de fonctionnement en régime permanent.

8. La ligne étudiée précédemment est-elle en accord avec la législation ?

## Exercice 3 Force de Van der Waals

Un atome (ou une molécule) ne possédant pas de moment dipolaire permanent, lorsqu'il est placé dans un champ $\overrightarrow{E}$, se polarise et il apparaît un dipôle induit de moment $\overrightarrow{p_i} = \epsilon_0\alpha\overrightarrow{E}$ où $\alpha$ est la polarisabilité. On place cet atome au point $M$ et on considère que le champ extérieur envisagé est celui créé par un dipôle permanent de moment $\overrightarrow{p}$ placé en $O$. On admet alors que leur interaction dérive d'une énergie potentielle $U_p = -\frac{1}{2}\epsilon_0\alpha E^2$.

1. Rappeler les expressions de composantes $E_r$, $E_\theta$ et $E_\phi$ du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par un dipôle de moment $\vec{p}$ placé en $O$.
2. Exprimer $E^2$ et montrer que :
$$U_p(r,\theta) = -\frac{\alpha p^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^6}(3\cos^2\theta + 1).$$
3. La force sur l'atome au point $M$ s'écrit $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U_p)$. Exprimer les coordonnées $F_r$, $F_\theta$ et $F_\phi$. (On pourra s'aider de l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées sphériques)
4. Exprimer la moyenne de ces coordonnées sur l'angle $\theta$ et montrer que :
$$< \overrightarrow{F} >= -\frac{15\alpha p^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^7}\overrightarrow{u_r}.$$
5. Commenter le résultat précédent.

## Exercice 4 Polarisabilité complexe d'un atome

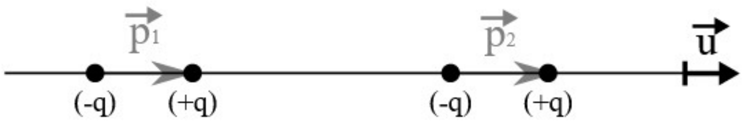
On assimile le noyau d'un atome à un point matériel de masse $m_{\mathrm{P}}$, de charge $Ze$ ; et le nuage électronique à une sphère de centre $N$, de rayon $R$, de masse $m_{\mathrm{N}}$, de charge $-Ze$ et de densité volumique de charge $\rho$ uniforme. Sous l'action d'un champ électrique extérieur, le noyau se déplace du centre du nuage jusqu'à un point $P$ de ce nuage, avec $NP = r < R$.

1. Donner l'expression de $\rho$ et déterminer le champ électrique $\vec{E_n}(P)$ créé par le nuage au point $P$, en l'absence du noyau.
2. Montrer que la force d'interaction entre le noyau et le nuage s'assimile à celle d'un ressort reliant $N$ et le noyau, de longueur à vide nulle, et de constante de raideur $K$ qu'on exprimera en fonction de $Z$, $e$ et $\epsilon_0$.
3. Lorsque le noyau est en mouvement dans le nuage électronique, on suppose qu'il subit une force de frottement linéaire
$$\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}.$$
La masse du noyau étant très grande devant celle du nuage, on suppose que le noyau est immobile et que c'est le nuage électronique qui se déplace, en subissant la même force de frottement, la force électrique du champ extérieur, et la force d'interaction électrique avec le noyau modélisée par l'action du ressort. Le champ électrique extérieur varie sinusoïdalement :
$$\overrightarrow{E} = E_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}.$$
Déterminer la polarisabilité complexe $\underline{\alpha}$ de l'atome en régime sinusoïdal forcé définie par $\overrightarrow{p_i} = \epsilon_0\underline{\alpha}\overrightarrow{E}$.

## Exercice 5 Force de Keesom

La force de Keesom est une force de Van der Waals entre molécules polaires. Ces molécules sont assimilables à deux dipôles électrostatiques identiques (permanents) $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$, dirigés tous deux suivant l'axe Ox, qui interagissent entre eux.
La force de Keesom est attractive : par exemple, le dipôle $\overrightarrow{p_1}$ créé un champ électrique au niveau du dipôle$\overrightarrow{p_2}$ qui tend à s'aligner sur ce champ. Il y a ensuite déplacement de $\overrightarrow{p_2}$ vers les champs forts, c'est à dire vers $\overrightarrow{p_1}$.
On peut faire le même raisonnement dans l'autre sens, mais pour raisonner ici, on considère $\overrightarrow{p_1}$ fixe.
Les dipôles sont colinéaires et orientés dans le même sens.

1. Compléter le schéma ci-dessous en indiquant :
   - Le champ $\overrightarrow{E_1}$ créé par le dipôle 1 au niveau du dipôle 2, sachant que l'on ne considère pas celui-ci uniforme sur la taille du dipôle.
   - Les forces de Coulomb qui s'exercent sur les charges $-q$ et $+q$ du dipôle 2 du fait de l'existence du champ $\overrightarrow{E_1}$.




2. Conclure quant au rapprochement du dipôle 2 vers le dipôle 1.
3. Trouver l'expression de la force qu'exerce le dipôle 1 sur le dipôle 2 (calculer la force qui s'exerce sur chaque charge du dipôle puis la résultante). On considèrera que la distance $r$ entre les deux dipôles (entre leur centre) est grande devant la taille $d$ des dipôles.

Données :
On rappelle l'expression du champ électrostatique créé par un dipôle : $\overrightarrow{E} = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_r} + \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_\theta}$