MP*
MPI*

# OEM dans les conducteurs

## Exercice 1 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique

Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité $\gamma$. Le champ électrique est :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u_x} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

1. Exprimer le champ magnétique associé cette onde.
2. Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting en $z$.
3. Calculer la moyenne temporelle de la puissance volumique cédée aux porteurs de charges.
4. Citer l'équation locale de Poynting et interpréter.

## Exercice 2 Réflexion d'une onde sur un métal

Un conducteur ohmique de conductivité $\gamma$ occupe le demi-espace $x > 0$, le demi-espace $x < 0$ étant vide. Une onde incidente de la forme :

$$\overrightarrow{\underline{E}_i} = E_0 \exp(j\omega t - j\omega x/c)\overrightarrow{u_z}$$

se propage dans le vide. Elle donne naissance à une onde transmise de la forme :

$$\overrightarrow{\underline{E}_t} = \underline{t}E_0 \exp(j\omega t - j\underline{k}x)\overrightarrow{u_z} \quad \text{avec} \quad \underline{k} = \frac{1-j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

et onde onde réfléchie de la forme :

$$\overrightarrow{\underline{E}_r} = \underline{r}E_0 \exp(j\omega t + j\omega x/c)\overrightarrow{u_z}$$

1. Déterminer les champs magnétiques correspondants.
2. On suppose l'absence de courant superficiel. Cela implique la continuité de $\overrightarrow{B}$ au niveau de l'interface vide-métal. Qu'en est-t-il du champ $\overrightarrow{E}$.
3. Établir l'expression de $\underline{t}$ en fonction de $\alpha = \dfrac{\omega\delta}{c}$.
4. Par la suite on suppose que $\alpha \ll 1$. Vérifier, qu'à l'ordre 1 en $\alpha$, $\underline{t} = \alpha(1+j)$.
5. Le conducteur à en réalité une surface finie $S$. Exprimer la moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting en $x = 0^+$. Que représente cette grandeur ?
6. Montrer que la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans un élément de volume $S\mathrm{d}x$ du conducteur vaut :

$$< \mathrm{d}\mathcal{P}_J >= \gamma\alpha^2 E_0^2 \exp\left(\frac{-2x}{\delta}\right) S\mathrm{d}x$$

7. En déduire la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans tout le conducteur. Commenter.

## Exercice 3 Transparence ultraviolette des métaux

On adopte le modèle de conduction de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau sur les électrons de conduction est de la forme $-\dfrac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v}$. Les électrons sont soumis à un champ électrique $\overrightarrow{E}$. On se place en RSF et travaille en notations complexes. On note $n_0 = 10^{28}$ le nombre volumique d'électrons libres.

1. Montrer que le métal possède une conductivité complexe :
$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e}$$
2. On rappelle que le métal est localement neutre. En déduire que la relation de dispersion des pseudo-ondes planes progressives harmoniques s'écrit :
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \underline{\sigma} i\omega$$
3. Comment se simplifie cette relation pour $\omega\tau \gg 1$ ? Interpréter alors le fait que certains métaux sont transparents dans l'UV.

## Exercice 4 Modes propres d'une cavité sans perte

Une cavité sans perte d'axe $(Ox)$ et de longueur $L$ est constituée par l'association de deux miroirs métalliques plans, conducteurs parfaits, situés en $x = 0$ et $x = L$. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électrique d'une onde monochromatique polarisée selon $\overrightarrow{u_z}$ a pour écriture complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(x,t) = \underline{E_1} \exp(i(\omega t - kx))\overrightarrow{u_z} + \underline{E_2} \exp(i(\omega t + kx))\overrightarrow{u_z}$$

1. Exprimer $\underline{E_2}$ en fonction de $\underline{E_1}$.
2. Montrer que la fréquence du champ électrique peut prendre des valeurs discrètes $f_n$ que l'on exprimera en fonction de $L$, $c$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Établir l'expression $\underline{\overrightarrow{E_n}}(x,t)$ du champ électrique dans la cavité à la fréquence $f_n$ en fonction de $\underline{E_1}$, $n$, $c$ et $L$. De quel type d'onde s'agit-il ?
4. Montrer que pour le mode $n$ il existe des nœuds de champ électrique. Déterminer les abscisses $x_{p,n}$ de ces nœuds ($p \in \mathbb{N}$), ainsi que la distance entre deux nœuds consécutifs.
5. Déterminer l'expression du champ magnétique $\underline{\overrightarrow{B_n}}(x,t)$ ainsi que les abscisses $x_{p',n}$ des nœuds de champ magnétique ($p' \in \mathbb{N}$).

## Exercice 5 Propagation de l'énergie entre deux miroirs

On étudie la propagation d'une OEM dans le vide compris entre deux conducteurs parfaits situés en $z < 0$ et $z > \ell$. Le champ électrique décrivant cette onde s'écrit :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{\ell}\right) \cos(kx - \omega t)\overrightarrow{u_y}$$

1. Vérifier que le champ $\overrightarrow{E}$ est bien compatible avec les conditions aux limites.
2. Quelle est la relation de dispersion vérifiée par l'onde associée à ce champ électrique.
3. A quelle condition l'onde peut-elle se propager ?
4. Exprimer la vitesse de phase. Commenter.
5. Exprimer la vitesse de groupe.
6. Déterminer l'expression du champ magnétique.
7. Déterminer le flux moyen du vecteur de Poynting à travers une surface $S$ orthogonale à $\overrightarrow{u_x}$, de longueur $L$ dans la direction $\overrightarrow{u_y}$ et de longueur $\ell$ dans la direction $\overrightarrow{u_z}$.
8. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique et en déduire la vitesse d'énergie.
9. À l'aide des relations de passage, déterminer l'expression des courant surfacique et de la charge surfacique au niveau des plans en $z < 0$ et $z > \ell$.

## Exercice 6 Réflexion sous incidence oblique

Une OPPH incidente de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_i} = k\cos\theta\overrightarrow{e_x} + k\sin\theta\overrightarrow{e_y}$ et polarisée rectilignement $\underline{\overrightarrow{E_i}}(M,t) = E_{0i}\exp[i(\omega t - \overrightarrow{k_i}\cdot\overrightarrow{OM})]\overrightarrow{e_z}$ se propage dans le demi-espace $x < 0$ et vient frapper la face plane (en $x = 0$= d'un métal conducteur parfait.

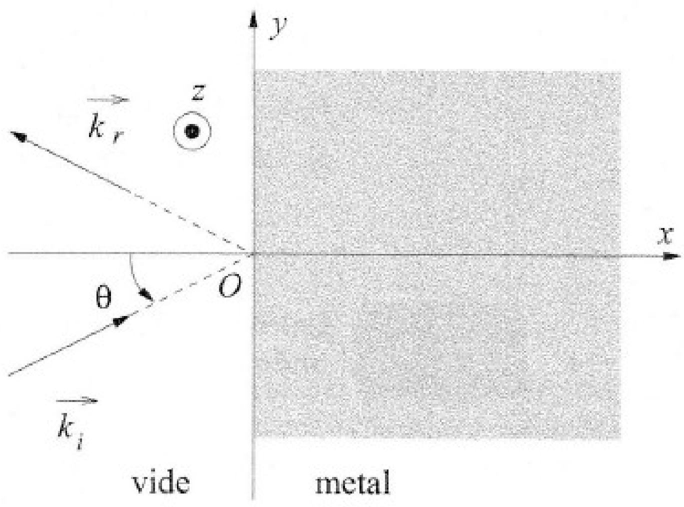


FIGURE 1 – Réflexion de l'onde sur le métal

On cherche le champ électrique de l'onde réfléchie sous la forme

$$\underline{\overrightarrow{E_r}}(M,t) = E_{0i}\exp[i(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}\cdot\overrightarrow{OM})]\overrightarrow{e_z} \text{ avec } \overrightarrow{k_r} = \begin{pmatrix} k_{rx} \\ k_{ry} \\ k_{rz} \end{pmatrix}$$

1. Écrire les conditions aux limites sur le champ électrique en $x = 0$.
2. Quelle est la valeur de $\omega_r$ ?
3. Exprimer $\overrightarrow{k_r}$ en fonction de $k$ et de $\theta$.
4. En déduire les lois de Descartes pour la réflexion sur un miroir.

## Exercice 7 Effet de peau sur un conducteur cylindrique

Un conducteur cylindrique d'axe $(Oz)$ et de rayon $a$ possède une conductivité $\sigma = 5{,}8 \times 10^7$ S/m réelle aux fréquences envisagées. Un générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation $\omega$, parallèle à $(Oz)$ et qui, dans le conducteur, est cherché sous la forme d'un champ non uniforme $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{E}(r)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\overrightarrow{e_z}$ avec $\underline{R}(r = a) = E_0$, valeur en surface.

1. Justifier que le métal reste localement neutre sous l'action du champ $\overrightarrow{E}$.
2. Rappeler le principe de l'ARQS. À quelle condition cette approximation est-elle valable ?
3. Montrer que, dans l'ARQS, le champ $\overrightarrow{E}$ vérifie une équation de diffusion dans le conducteur.
4. Vérifier qu'une solution de la forme $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\exp[-(1+i)(a-r)/\delta]\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\overrightarrow{e_z}$ convient si $r \gg \delta$, où $r$ est la distance d'un point du conducteur à l'axe et $\delta$ une grandeur homogène à une longueur à exprimer en fonction de $\mu_0$, $\sigma$, $\omega$.
5. Interpréter physiquement la solution proposée. Quelle signification peut-n donner à $\delta$ ? Tracer l'amplitude réelle de $E$ en fonction de $r$.
6. Un fil de cuivre de diamètre 1 mm convient-il à la transmission de signaux de fréquence $f = 50$ Hz ? et en TP pour des signaux de fréquence $f' = 100$ kHz ?
7. Ce fil convient-il à l'émission d'ondes radio ? Justifier dans ce cas le nom d'épaisseur de peau donné à $\delta$..
8. Évaluer la puissance moyenne $< \mathcal{P} >$ dissipée par effet Joule dans un tronçon de longueur $\ell$ de ce conducteur en fonction de $\sigma$, $E_0$, $\ell$, $a$ et $\delta$ dans le domaine où $\delta \ll a$. Commenter.
9. Calculer l'intensité complexe $\underline{I}$ du courant électrique et en déduire $< I^2 >$ en fonction de $\sigma$, $E_0$, $a$, et $\delta$. En déduire la résistance $R$ de ce tronçon en fonction de $\delta$, $a$ et $R_0$ sa résistance en courant continue.